

1. Integralrechnung

1.1. Lokale Änderungsrate und Gesamtänderung

Ist der Verlauf der lokalen (momentanen) Änderungsrate einer Größe durch ihren Graphen gegeben, so kann man die Gesamtänderung der Größe in einem Intervall $[a; b]$ als Maßzahl des Flächeninhalts A zwischen dem Graphen und der x -Achse innerhalb des Intervalls deuten und somit ermitteln.

1.2. Das Integral

Definition:

Die Funktion f mit $f(x) \geq 0$ sein auf dem Intervall $[a; b]$ definiert. Dann nennt man den gemeinsamen Grenzwert $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} O_n$ von Unter- und Obersumme das Integral der Funktion f zwischen den Grenzen a und b .

Dieser gemeinsame Grenzwert entspricht von seinem Wert her dem Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen von f und der x -Achse über dem Intervall $[a; b]$.

Wir schreiben dafür: $\int_a^b f(x) dx$ (lies: Integral von $f(x)$ dx von a bis b).

1.3. Das Integral als Flächenbilanz; die Integralfunktion

Satz:

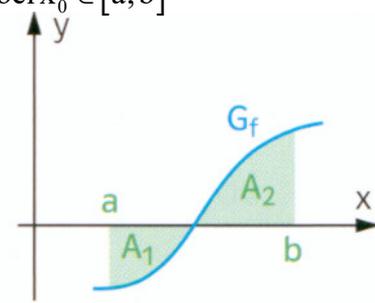
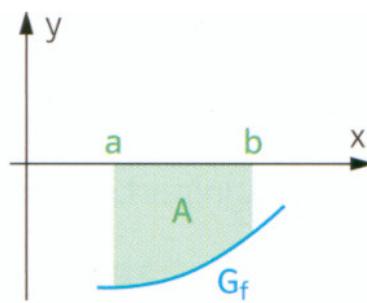
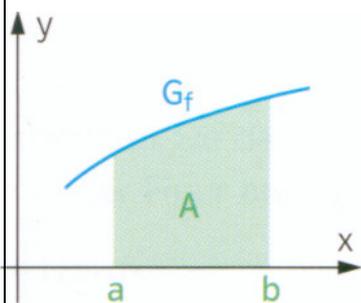
Für eine Funktion f , die in einem Intervall $[a; b]$ definiert ist, gilt:

Falls

$f(x) > 0$ für alle $x \in [a; b]$:

$f(x) < 0$ für alle $x \in [a; b]$

$f(x_0) = 0$ und Vorzeichenwechsel von $f(x)$ bei $x_0 \in [a; b]$



$$\int_a^b f(x) dx = A > 0$$

$$\int_a^b f(x) dx = -A < 0$$

$$\int_a^b f(x) dx = -A_1 + A_2 \begin{cases} > 0, \text{ falls } A_1 < A_2 \\ < 0, \text{ falls } A_1 > A_2 \end{cases}$$

Definition:

Die Funktion $f : t \mapsto f(t)$ sei mit ihrem Definitionsbereich D_f gegeben. Dann heißt für $a \in D_f$ die

Funktion $I_a : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ **Integralfunktion** von f zur unteren Grenze a .

1.4. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Die Funktion $f : t \mapsto f(t)$ sei im Intervall $[a; b]$ definiert.

Dann gilt für die Integralfunktion $I_a : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$:

$$I'_a(x) = f(x) \text{ für } x \in [a; b].$$

Kurz: Die **Integralfunktion** I_a von f ist eine **Stammfunktion** von f .

Bemerkung: Die Integration ist die Umkehrung der Differentiation.

Satz (Berechnung von Integralen):

Die Funktion f sei in dem Intervall $[a; b]$ definiert.

Ist F eine beliebige Stammfunktion von f in diesem Intervall, dann gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

1.5. Stammfunktionen

Stammfunktionen: Eine kleine Übersicht

| | | | | | | | | |
|-------------|--|-------------------|-------------------|-----|--|------------------------|-------|---------------------|
| f(x) | x^n | x^2 | x | 1 | $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ | $\frac{1}{x} = x^{-1}$ | e^x | $\ln x$ |
| F(x) | $\frac{1}{n+1} x^{n+1}; n \in \bullet$ | $\frac{1}{3} x^3$ | $\frac{1}{2} x^2$ | x | $\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \sqrt{x^3}$ | $\ln x $ | e^x | $x \cdot \ln x - x$ |

Begriff: Das **unbestimmte Integral** $\int f(x)dx$ wird oft als Symbol für die Menge aller

Stammfunktionen einer Funktion f verwendet. Man notiert dann in der Regel die Konstante c dazu:

z.B.: $\int \sin x dx = -\cos x + c; c \in \mathbb{R}$.

Skizzieren von Stammfunktionen:

Um bei gegebenem Graphen G_f einer Funktion f den Graphen einer Stammfunktion von f zu skizzieren, nutzt man charakteristische Punkte des Graphen von f , wie Null- und Extremstellen, und beachtet Vorzeichenbereiche von G_f .

1.6. Eigenschaften von Stammfunktionen und Integralen**Satz:**

Sind G und H jeweils Stammfunktionen von g und h , so gilt für alle $c \in \mathbb{R}$:

Ist $f : x \mapsto c \cdot g(x)$ bzw. $f : x \mapsto g(x) + h(x)$, so ist
 $F : x \mapsto c \cdot G(x)$ bzw. $F : x \mapsto G(x) + H(x)$ eine mögliche Stammfunktion.

Satz:

Sind die Funktionen f und g auf einem Intervall I definiert, dann gilt für alle $c \in \mathbb{R}$ und alle $a, b \in I$:

$$\int_a^b c \cdot f(x) dx = c \cdot \int_a^b f(x) dx \qquad \int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx .$$

1.7. Flächenberechnungen mit dem Integral

Vorgehen bei der Berechnung des Flächeninhalts zwischen dem Graphen einer Funktion f und der x -Achse über dem Intervall $[a; b]$:

1. Bestimmen der Nullstellen von f .
2. Ermitteln des Vorzeichens der Funktionswerte $f(x)$ in den Teilintervallen, d.h. ermitteln, ob das jeweilige Flächenstück unterhalb oder oberhalb der x -Achse liegt.
3. Berechnen der Inhalte der Teilflächen und Addieren der Werte.

Satz:

Für den Inhalt A der Fläche zwischen den Graphen zweier Funktionen f und g , die sich im Intervall $[a; b]$ nicht schneiden, und den Grenzen $x = a$ und $x = b$ gilt:

$$A = \left| \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \right| .$$

Vorgehen bei der Berechnung des Flächeninhalts zwischen den Graphen zweier Funktionen f und g über dem Intervall $[a; b]$:

1. Bestimmen aller Schnittstellen z_1, z_2, \dots, z_n der beiden Graphen in $[a; b]$.
2. Berechnen der Inhalte der Teilflächen über $[a; z_1], [z_1, z_2], \dots, [z_n, b]$ und Addieren der Werte.

1.8. Ins Unendliche reichende Flächen

Definition:

Existiert für eine im Intervall $[a; +\infty[$ bzw. $]a; b]$ definierte Funktion f

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx \quad \text{bzw.} \quad \lim_{z \rightarrow a} \int_z^b f(x) dx,$$

so heißt dieser Grenzwert das **uneigentliche Integral** über dem betreffenden Intervall.

2. Weitere Eigenschaften von Funktionen und deren Graphen

2.1. Die zweite Ableitung

Definition:

Ist die Ableitung f' einer Funktion f differenzierbar, so erhält man durch Ableiten von f' die zweite Ableitung f'' .

Analog können auch höhere Ableitungen (f''' , $f^{(4)}$, usw.) definiert werden.

2.2. Krümmung von Graphen

Definition:

Bewegt man sich auf dem Graphen einer Funktion f in positiver x -Richtung und beschreibt man dabei eine Rechtskurve (Linkskurve), so heißt der Graph in diesem Bereich **rechtsgekrümmt** (**linksgekrümmt**).

Kriterien für das Krümmungsverhalten:

Kriterium mithilfe der ersten Ableitung:

Für eine differenzierbare Funktion f gilt:

Wenn f' in einem Intervall streng monoton

- zunehmend ist, dann ist der Graph von f dort linksgekrümmt,
- abnehmend ist, dann ist der Graph von f dort rechtsgekrümmt.

Kriterium mithilfe der zweiten Ableitung:

Für eine zweimal differenzierbare Funktion f gilt:

- Wenn $f''(x) > 0$ in einem Intervall I ist, dann ist der Graph von f dort linksgekrümmt.
- Wenn $f''(x) < 0$ in einem Intervall I ist, dann ist der Graph von f dort rechtsgekrümmt.

2.3. Wendepunkte, Art der Extrema

Definition:

Die Funktion f sei in einem Intervall I differenzierbar.

Eine Stelle $x_0 \in I$, bei der der Graph von f von einer Linkskrümmung in eine Rechtskrümmung (oder umgekehrt) übergeht, heißt **Wendestelle** von f .

Der zugehörige Punkt $W(x_0 | f(x_0))$ heißt **Wendepunkt**.

Die Tangente an den Graphen im Wendepunkt heißt **Wendetangente** und durchsetzt den Graphen von f .

Satz: (Kriterium für Wendestellen und Extrema)

Die Funktion f sei in einem Intervall I zweimal differenzierbar und $x_0 \in I$.

- Wenn $f''(x_0) = 0$ und f'' bei x_0 einen Vorzeichenwechsel hat, dann hat die Funktion f an der Stelle x_0 eine **Wendestelle**.
- Wenn $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$ und f'' bei x_0 einen Vorzeichenwechsel hat, dann hat die Funktion f bei $P(x_0 | f(x_0))$ einen **Terrassenpunkt**. Die Wendetangente im Terrassenpunkt ist parallel zur x -Achse, d.h. waagrecht.
- Wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$ ist, dann hat f an der Stelle x_0 ein lokales **Maximum**.
- Wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$ ist, dann hat f an der Stelle x_0 ein lokales **Minimum**.

Beachte:

Gilt für eine Stelle $x_0 \in I$: $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$ (d.h., das obige Kriterium für Extrema ist nicht erfüllt), darf nicht gefolgert werden, dass f kein Extremum hat, z.B. bei $f : x \mapsto x^4$.

Hier untersucht man wie bisher, ob f' in einer Umgebung von x_0 einen Vorzeichenwechsel hat.

3. Zufallsgrößen und Binomialverteilung

3.1. Zufallsgrößen

Definition:

Eine Funktion X , die jedem Ergebnis $\omega \in \Omega$ eines Zufallsexperiments eine reelle Zahl $X(\omega)$ zuordnet, heißt Zufallsgröße oder Zufallsvariable auf Ω .

Notiert: $X: \omega \mapsto X(\omega)$ mit $\omega \in \Omega$ und $X(\omega) \in \mathbb{R}$.

3.2. Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsgröße

Definition:

Die Funktion, die jedem Wert x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) einer Zufallsgröße X die Wahrscheinlichkeit

$P(X = x_i)$ zuordnet, heißt Wahrscheinlichkeitsfunktion der Zufallsgröße X oder

Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X bzw. kurz Verteilung von X .

Definition:

Die Funktion F , die bei gegebener Zufallsgröße X jeder reellen Zahl x die Wahrscheinlichkeit

$P(X \leq x_i)$ zuordnet, heißt kumulative Verteilungsfunktion der Zufallsgröße X .

Notiert: $F: x \mapsto P(X \leq x)$ mit $x \in \mathbb{R}$ und $P(X \leq x) \in [0; 1]$.

3.3. Erwartungswert einer Zufallsgröße

Definition

Ist X eine Zufallsgröße, deren mögliche Werte x_1, x_2, \dots, x_n sind, so heißt die reelle Zahl $E(X)$ mit

$E(X) = x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) + \dots + x_n \cdot P(X = x_n)$ Erwartungswert der Zufallsgröße X .

3.4. Varianz einer Zufallsgröße

Definition

Ist X eine Zufallsgröße, deren mögliche Werte x_1, x_2, \dots, x_n sind und die den Erwartungswert

$E(X) = \mu$ hat, so heißt die reelle Zahl $\text{Var}(X)$ mit

$\text{Var}(X) = (x_1 - \mu)^2 \cdot P(X = x_1) + (x_2 - \mu)^2 \cdot P(X = x_2) + \dots + (x_n - \mu)^2 \cdot P(X = x_n)$ die Varianz der

Zufallsgröße X .

Beachte: Die Varianz ist eine Kenngröße für die Streuung der Werte x_i der Zufallsgröße X um ihren Erwartungswert μ .

Definition: Die reelle Zahl $\sqrt{\text{Var}(X)}$ heißt **Standardabweichung** der Zufallsgröße X .

Oft schreibt man auch $\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)}$. Damit gilt dann $\sigma^2 = \text{Var}(X)$.

Beachte: Die Standardabweichung versucht das Problem zu beheben, dass die Varianz nicht in der Einheit der Maßzahl der Größe angegeben, für die die Zufallsvariable X steht, sondern in „Einheit²“. Die Standardabweichung ist dann wieder in der „passenden“ Einheit.

3.5. Ziehen aus einer Urne mit Beachtung der Reihenfolge

Ziehen mit Beachtung der Reihenfolge und mit Zurücklegen

Aus einer Urne mit n unterscheidbaren Kugeln wird k -mal eine Kugel **mit Zurücklegen** gezogen. Die gezogenen Kugeln werden in der Reihenfolge des Ziehens notiert.

Dann sind n^k verschiedene Ergebnisse (k -Tupel) möglich.

Ziehen mit Beachtung der Reihenfolge und mit Zurücklegen

Aus einer Urne mit n unterscheidbaren Kugeln wird k -mal eine Kugel **ohne Zurücklegen** gezogen und in der Reihenfolge der Ziehens notiert.

Dann sind $n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$ verschiedene Ergebnisse möglich.

Werden alle Kugeln nacheinander aus der Urne ohne Zurücklegen gezogen, so ist $k = n$. Die Anzahl der unterschiedlichen Reihenfolgen gibt dann an, auf wie viele verschiedene Arten n Elemente angeordnet werden können. Jede Anordnung bezeichnet man auch als eine **Permutation** der n Elemente.

Die Anzahl der Permutationen von n Elementen beträgt damit $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$.

(sprich: n Fakultät)

3.6. Ziehen aus einer Urne mit einem Griff

Ziehen ohne Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge

Aus einer Urne mit n unterscheidbaren Kugeln werden k Kugeln mit einem Griff, d.h. ohne Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge, gezogen.

Dann gibt es $\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!}$ mögliche Ergebnisse.

Definition:

Für $k \in \mathbb{N}$ und $k \leq n$ heißt $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ **Binomialkoeffizient** (sprich: „ n über k “).

Satz:

Aus einer Urne mit N Kugeln, von denen S schwarz sind, werden n Kugeln mit einem Griff, d.h. ohne Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge gezogen. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln an.

$$\text{Dann gilt: } P(X = s) = \frac{\binom{S}{s} \cdot \binom{N-S}{n-s}}{\binom{N}{n}}.$$

Beachte: Zerlege die Menge der Kugeln in zwei Teilmengen (S Schwarze und N Nicht-Schwarze).

Damit ist die obere Zahl in beiden Binomialkoeffizienten des Zählers festgelegt. Die „untere“ Zahl des Binomialkoeffizienten ist danach nichts anderes als ein Wert, den die Zufallsvariable X annehmen kann und die von 0 bis S gehen kann.

3.7. Bernoulli-Experiment und Bernoulli-Kette

Definition:

Ein Zufallsexperiment mit nur zwei Ergebnissen heißt Bernoulli-Experiment. Die Wahrscheinlichkeit für Treffer wird mit p , die für Niete mit q bezeichnet, wobei $q = 1 - p$ ist.

Ein Zufallsexperiment, das aus n unabhängigen Durchführungen desselben Bernoulli-Experiments besteht, heißt Bernoulli-Kette der Länge n mit dem Parameter p .

3.8. Binomialverteilung

Satz (Formel von Bernoulli):

Gegeben ist eine Bernoulli-Kette der Länge n mit der Trefferwahrscheinlichkeit p . Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der Treffer an.

Dann beträgt die Wahrscheinlichkeit für genau k Treffer mit $k \in \{0; 1; \dots; n\}$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}.$$

Binomialverteilung

Eine Zufallsgröße X heißt **binomialverteilt** nach $B(n; p)$ oder $B_{n,p}$, wenn gilt:

- X kann die Werte $0; 1; 2; \dots; n$ annehmen.
- $P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ mit $0 \leq p \leq 1$.

Die **kumulative Verteilungsfunktion** einer nach $B(n; p)$ verteilten Zufallsgröße wird häufig mit F_p^n bezeichnet. Entsprechend bezeichnet man: $F_p^n(x) = P(X \leq x) = \sum B(n; p; k)$.

3.9. Modellieren mit der Binomialverteilung

Vorgehen beim Modellieren mit der Binomialverteilung

1. Prüfe, ob das Zufallsexperiment als Bernoulli-Kette der Länge n mit der Wahrscheinlichkeit p für Treffer angesehen werden kann.
2. Falls ja, definiere die $B(n; p)$ -verteilte Zufallsgröße X .
3. Bestimme die gesuchte Wahrscheinlichkeit mithilfe der Binomialverteilung.

3.10. Erwartungswert und Varianz der Binomialverteilung

Satz:

Eine $B(n; p)$ -verteilte Zufallsgröße X hat den Erwartungswert $\mu = E(X) = n \cdot p$ und die Varianz

$\sigma^2 = \text{Var}(X) = n \cdot p \cdot (1-p) = n \cdot p \cdot q$. Für die Standardabweichung σ gilt: $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$.

4. Beurteilende Statistik

4.1. Testen von Hypothese

Testen von Hypothesen:

Zu einem Sachverhalt (z.B. den Anteil schwarzer Kugeln in einer Urne) werden zwei sich ausschließende Hypothesen betrachtet:

- Die Nullhypothese H_0 und die Gegenhypothese H_1 .
- Getestet wird, ob aufgrund des Stichprobenergebnisses H_0 verworfen werden kann oder nicht.
- Dazu wird der Wertebereich der Testgröße in den Ablehnungsbereich (kritischer Bereich) K und den Annahmehereich \bar{K} zerlegt.

Entscheidungsregel:

Liegt der durch die Stichprobe gewonnene Wert der Testgröße in K , dann wird H_0 verworfen, ansonsten wird H_0 nicht verworfen.

4.2. Fehler 1. Art und 2. Art

Fehler beim Testen von Hypothesen:

| | | Zustand der Wirklichkeit | |
|-----------------------------|-----------------|--------------------------|-----------------------|
| | | H_0 ist wahr | H_0 ist falsch |
| Nullhypothese H_0 wird | abgelehnt | Fehler 1. Art | Richtige Entscheidung |
| | nicht abgelehnt | Richtige Entscheidung | Fehler 2. Art |

Die Wahrscheinlichkeit α' für den Fehler 1. Art nennt man auch das Risiko 1. Art, die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art bezeichnet man gewöhnlich mit β' .

Bei festem Stichprobenumfang n bewirkt eine Verkleinerung von β' durch Vergrößerung des kritischen Bereichs K zwangsläufig eine Vergrößerung von α' und umgekehrt.

Eine Verringerung beider Fehler ist nur möglich durch Erhöhung des Stichprobenumfangs.

4.3. Einseitiger Signifikanztest

Definition:

Eine vorgegebene Obergrenze für den Fehler 1. Art nennt man Signifikanzniveau α . Daraus ergibt sich der kritische Bereich und somit die Entscheidungsregel des Tests. Ein so konstruierter Test wird auch als Signifikanztest bezeichnet.

Vorgehen beim einseitigen Signifikanztest:

1. Festlegen der Testgröße Z und des Stichprobenumfangs n .
2. Mathematische Formulierung der Nullhypothese H_0 und der Gegenhypothese H_1 .
3. Festlegen des Signifikanzniveaus α gemäß dem in der Sachsituation maximal tolerierten Fehler 1. Art.
4. Bestimmen der Entscheidungsregel, d.h. Konstruktion des kritischen Bereichs K .

Linksseitiger Test:

$$H_0 : p = p_0 \text{ oder } H_0 : p \geq p_0$$

$$H_1 : p < p_0$$

$$\text{Kritischer Bereich } K = \{0; 1; \dots; g\},$$

wobei g die größte ganze Zahl ist mit

$$\alpha' = P_{p_0}^n (Z \leq g) \leq \alpha.$$

Rechtsseitiger Test:

$$H_0 : p = p_0 \text{ oder } H_0 : p \leq p_0$$

$$H_1 : p > p_0$$

$$\text{Kritischer Bereich } K = \{g; g + 1; \dots; n\},$$

wobei g die kleinste ganze Zahl ist mit

$$\alpha' = P_{p_0}^n (Z \geq g) \leq \alpha.$$

5. Geraden und Ebenen im Raum

5.1. Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit von Vektoren

Definition:

Die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ heißen **linear abhängig**, wenn mindestens einer dieser Vektoren als Linearkombination der anderen Vektoren darstellbar ist.

Andernfalls heißen die Vektoren **linear unabhängig**.

Satz:

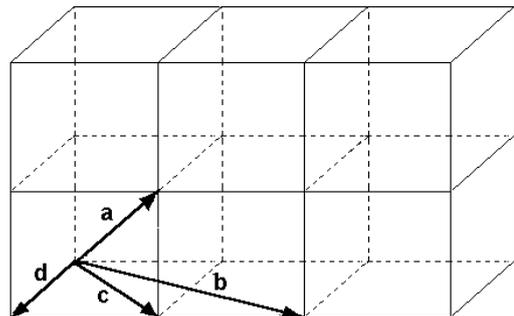
Im \mathbb{R}^2 sind höchstens zwei Vektoren,

im \mathbb{R}^3 sind höchstens drei Vektoren,

linear unabhängig.

Jeder weitere Vektor lässt sich eindeutig als Linearkombination dieser linear unabhängigen Vektoren darstellen.

In der Grafik sind die drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linear unabhängig, weil durch eine Linearkombination aus diesen drei Vektoren jeder andere Vektor im Raum dargestellt werden kann, so z.B. auch der Vektor \vec{d} .



Beachte:

Zwei Vektoren im \mathbb{R}^3 sind linear unabhängig, wenn kein Vektor Vielfaches des anderen ist.

Lässt sich im \mathbb{R}^3 ein Vektor als Linearkombination von zwei anderen (linear unabhängigen) Vektoren darstellen, so nennt man alle drei Vektoren linear abhängig.

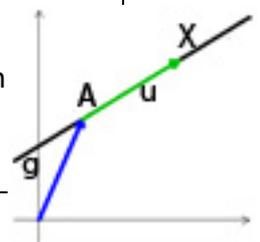
5.2. Vektorielle Darstellung von Geraden

Satz und Definition:

Jede Gerade g lässt sich durch eine Gleichung in der sogenannten **Parameterform**

$\vec{X} = \vec{A} + \lambda \cdot \vec{u}$ mit dem Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ beschreiben.

Hierbei ist \vec{A} der Ortsvektor eines Punktes der Geraden (Aufpunkt) und \vec{u} ($\vec{u} \neq \vec{0}$) ein Richtungsvektor von g .



Merke:

(1) Die Schnittpunkte der Gerade mit den Koordinatenebenen nennt man **Spurpunkte**.

Mit Hilfe dieser Spurpunkte lässt sich die Lage der Geraden im Raum bzw.

Koordinatensystem leichter veranschaulichen.

Berechnung: Setze $x_1 = 0$ und bestimme in der Parameterform der Geraden λ . Damit

berechne dann die Koordinaten des Spurpunktes mit der x_2x_3 -Ebene. Verfahre dann mit den beiden anderen Ebenen genauso.

(2) Die **senkrechte Projektion** P' eines Punktes $P(p_1 | p_2 | p_3)$ in die x_1x_2 -Ebene erhält

man als Schnittpunkt dieser Ebene mit der Parallelen zur x_3 -Achse durch P. P' hat

dann die Koordinaten $P'(p_1 | p_2 | 0)$. Für die Projektion einer Geraden

$$g: \vec{X} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \text{ folgt also: } g_{12}: \vec{X} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

5.3. Gegenseitige Lage von Geraden

Im \mathbb{R}^3 können zwei Geraden $g: \vec{X} = \vec{A} + \lambda \cdot \vec{u}$ und $h: \vec{X} = \vec{B} + \mu \cdot \vec{v}$ in folgender Weise

zueinander liegen:

| \vec{u} und \vec{v} sind linear abhängig, d.h. $\vec{v} = r \cdot \vec{u}$ | \vec{u} und \vec{v} sind linear unabhängig |
|--|--|
| $g = h$: Geraden sind identisch: | Geraden g und h schneiden sich in einem Punkt |
| $g \parallel h$: Geraden sind parallel | G und h sind windschief |

Zur Bestimmung der gegenseitigen Lage von Geraden setzt man die Parameterdarstellungen beider Geraden gleich und wandelt dies in ein Gleichungssystem mit zwei Unbekannten um.

Zu Beginn sollte man allerdings immer prüfen, ob die beiden Richtungsvektoren linear abhängig sind, d.h. ob der eine als ein Vielfaches des anderen Vektors dargestellt werden kann. Ist dies der Fall, führt eine Punktprobe sehr schnell zum Ergebnis (z.B. den Aufpunkt des ersten Vektors prüfen, ob er auch auf der zweiten Geraden liegt.)

Prüfschema zur Bestimmung der gegenseitigen Lage von zwei Geraden

$$g: \vec{X} = \vec{A} + \lambda \cdot \vec{u} \text{ und } h: \vec{X} = \vec{B} + \mu \cdot \vec{v}$$

| Sind \vec{u} und \vec{v} linear abhängig? | | | |
|---|-----------------|--|------------------------------------|
| ja | | nein | |
| g parallel zu h | | g nicht parallel zu h | |
| Liegt A auf h? (Punktprobe) | | Hat $\vec{A} + \lambda \cdot \vec{u} = \vec{B} + \mu \cdot \vec{v}$ eine Lösung? | |
| Ja | nein | ja | nein |
| $g = h$ | $g \parallel h$ | g und h schneiden sich in einem Punkt S | g und h sind zueinander windschief |

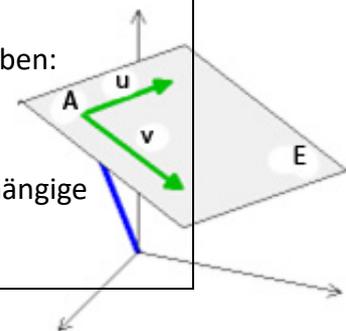
5.4. Vektorielle Darstellung von Ebenen

Satz und Definition:

Jede Ebene E lässt sich durch eine **Ebenengleichung in Parameterform** beschreiben:

$$E: \vec{A} + \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v} (\lambda, \mu \in \mathbb{R}).$$

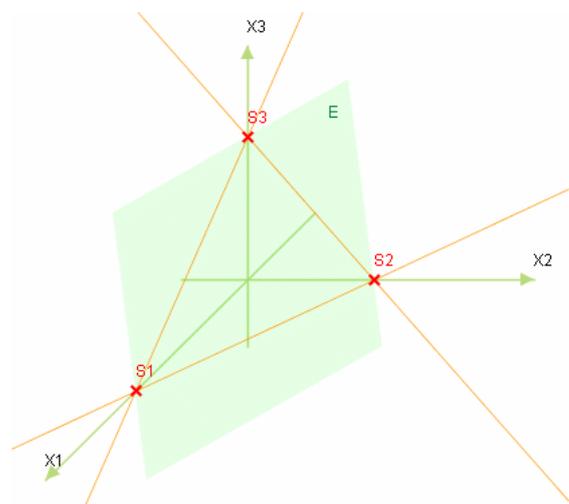
Hierbei ist \vec{A} der Ortsvektor eines Aufpunktes. \vec{u} und \vec{v} sind zwei linear unabhängige Richtungsvektoren.



Ist die Ebene E durch drei Punkte A, B und C gegeben, die nicht auf einer Geraden liegen, so kann man z.B. $\vec{u} = \vec{AB}$ und $\vec{v} = \vec{AC}$ als Richtungsvektoren wählen.

Um die Lage der Ebene E im Koordinatensystem zu veranschaulichen, bestimmt man die Schnittpunkte der Ebene mit den Koordinatenachsen und zeichnet die Schnittgeraden der Ebene mit den Koordinatenebenen, die sogenannten **Spurgeraden** der Ebene.

Den Schnittpunkt der Ebene z.B. mit der x_1 -Achse erhält man, indem man in der Parametergleichung von E gleichzeitig $x_2 = 0$ und $x_3 = 0$ setzt.



5.5. Normalenform der Ebenengleichung

Satz und Definition

Jede Ebene lässt sich durch eine Ebenengleichung in Normalenform beschreiben:

Ist die Ebene E durch einen Aufpunkt A und einen Normalenvektor \vec{n} festgelegt, so unterscheidet man folgende Darstellungen der Normalenform:

Vektordarstellung:
$$\vec{n} \circ (\vec{X} - \vec{A}) = 0$$

Koordinatendarstellung:
$$n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_0 = 0 \text{ mit } n_0 = -(n_1a_1 + n_2a_2 + n_3a_3).$$

Ist die Ebenengleichung in Parameterform gegeben durch $E: \vec{A} + \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v} (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$, so liefert das Vektorprodukt $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$ einen Normalenvektor.

Definition (Hesse'sche Normalenform der Ebenengleichung):

Vektordarstellung:
$$\vec{n}_0 \circ (\vec{X} - \vec{A}) = 0$$

Dabei ist der Einheitsvektor \vec{n}_0 zu \vec{n} so gerichtet, dass $\vec{n}_0 \circ \vec{A} > 0$ ist, d.h. der Winkel zwischen \vec{A} und \vec{n}_0 ist spitz.

Koordinatendarstellung:
$$\frac{n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_0}{\pm \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} = 0.$$

Dabei ist das Vorzeichen vor der Wurzel so zu wählen, dass $\frac{n_0}{\pm \sqrt{(\vec{n})^2}} < 0$ wird.

5.6. Gegenseitige Lage von Gerade und Ebene

Satz:

Die gegenseitige Lage der Geraden $g: \vec{X} = \vec{A} + \lambda \cdot \vec{u}$ und der Ebene $E: \vec{n} \circ (\vec{X} - \vec{B}) = 0$ lässt sich bestimmen, indem man die Anzahl der gemeinsamen Punkte von g und E untersucht.

Setzt man den Ortsvektor \vec{X} aus der Gleichung für g in die Normalengleichung für E ein, so erhält man die Gleichung:

$$\vec{n} \circ \left[(\vec{A} + \lambda \cdot \vec{u}) - \vec{B} \right] = 0$$

zur Bestimmung der Parameterwerte für die gemeinsamen Punkte.

Hat diese Gleichung genau eine Lösung, dann schneiden sich g und E in einem Punkt.

Gilt insbesondere $\vec{u} = r \cdot \vec{n}$ (mit einem $r \in \mathbb{R}$), so ist g senkrecht zu E.

Hat diese Gleichung keine Lösung, so sind g und E parallel.

Hat diese Gleichung unendlich viele Lösungen, so liegt g in E.

5.7. Gegenseitige Lage von Ebenen

Um die gegenseitige Lage der in Normalenform gegebenen Ebenen $E: \vec{n} \circ (\vec{X} - \vec{A}) = 0$ und $F: \vec{m} \circ (\vec{X} - \vec{B}) = 0$ zu untersuchen, kann man folgendermaßen vorgehen:

| Sind die Normalenvektoren \vec{n} und \vec{m} linear abhängig? | | |
|--|--------------------------------|---|
| ja | nein | |
| $E \parallel F$ | | E und F schneiden sich in einer Geraden. Die gemeinsamen Punkte erhält man durch Lösen des Gleichungssystems aus den Koordinatendarstellungen. |
| Haben E und F gemeinsame Punkte? | | |
| ja | nein | |
| $E = F$ | $E \parallel F$ und $E \neq F$ | |

Gegeben sind die beiden Ebenen $E: x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 6 = 0$ und $F: x_1 + 2x_2 + x_3 - 4 = 0$.

(1) Die Normalenvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind offensichtlich nicht linear abhängig.

(2) Nun gilt es das Gleichungssystem zu lösen:

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 6 = 0 & \quad \text{(I)} \quad x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 6 = 0 \\ \text{(II)} \quad x_1 + 2x_2 + x_3 - 4 = 0 & \quad \text{(II)} \quad x_1 + 2x_2 + x_3 - 4 = 0 \quad \text{II} - \text{I} \quad \text{(III)} \quad 4x_2 - 2x_3 + 2 = 0 \end{aligned}$$

Da dieses Gleichungssystem unterbestimmt ist (zwei Gleichungen mit drei Unbekannten), ist nun eine der beiden Variablen in (III) durch λ zu ersetzen. Wir wählen $\lambda = x_3$ und lösen dann nach x_2 auf, was zu

$$\text{(III)} \quad 4x_2 - 2\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow x_2 = \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2}$$

Abhängigkeit von λ bestimmt.

Nun gilt es noch eine Gleichung aus (I) und (II) zu ermitteln, die nur x_1 und x_3 enthält, um auch noch einen Wert für x_1 in Abhängigkeit von λ zu erhalten.

$$(I) \quad x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 6 = 0$$

$$(II) \quad x_1 + 2x_2 + x_3 - 4 = 0 \quad \text{II} + \text{I} \quad (III) \quad 2x_1 + 4x_3 - 10 = 0 \quad \text{Mit } \lambda = x_3 \text{ folgt nun:}$$

$$(III) \quad 2x_1 + 4\lambda - 10 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2\lambda + 5.$$

$$(3) \text{ Der Lösungsvektor ist damit: } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\lambda + 5 \\ 0,5\lambda - 0,5 \\ \lambda \end{pmatrix}$$

Wenn wir den rechten Vektor nun in den λ -Teil (Richtungsvektor-Teil) und einen Koordinatenteil zerlegen, erhalten wir die Schnittgerade g :

$$g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ -0,5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 0,5 \\ 1 \end{pmatrix},$$

5.8. Abstandsbestimmungen

(1) Abstand Punkt – Gerade

Um den Abstand d eines Punktes P von einer Geraden $g: \vec{X} = \vec{A} + \lambda \cdot \vec{u}$ zu berechnen, kann man so vorgehen:

1. Aufstellen der Gleichung einer Ebene E , die P enthält und senkrecht zu g ist:
Vektordarstellung der Ebene E mit dem Normalenvektor \vec{u} und dem Aufpunkt P .
2. Bestimmen des Schnittpunkts F der Ebene E mit der Geraden g :
Einsetzen von g in die Normalenform der Ebenengleichung von E und Berechnung von λ , Einsetzen von λ in die Geradengleichung von g und Bestimmen der Koordinaten von F , also des Lotfußpunktes von g auf E .
3. Berechnen des Abstandes der Punkte P und F :
Berechnen der Vektorlänge $|\vec{FP}|$.

(2) Abstand zweier paralleler Geraden

Wie unter (1), dabei kann der Abstand eines beliebigen Punktes der Geraden h von der Geraden g untersucht werden.

(3) Abstand zweier windschiefer Geraden

Den Abstand zweier windschiefer Geraden $g: \vec{X} = \vec{A} + \lambda \cdot \vec{u}$ und $h: \vec{X} = \vec{B} + \mu \cdot \vec{v}$ berechnet man folgendermaßen:

1. Man bestimmt zunächst eine Hilfsebene E , die g enthält und zu h parallel ist. Ihre Gleichung lautet in Normalenform: $E: (\vec{u} \times \vec{v}) \circ (\vec{X} - \vec{A}) = 0$:

Bilde also zunächst das Vektorprodukt der beiden Richtungsvektoren und benutze den Aufpunkt von g als Aufpunkt der Ebene E .

2. Der Abstand der windschiefen Geraden g und h ist gleich dem Abstand des

Aufpunktes B der Geraden h von der Ebene E . Es gilt: $d = \frac{\left| (\vec{u} \times \vec{v}) \circ (\vec{B} - \vec{A}) \right|}{\left| \vec{u} \times \vec{v} \right|}$:

Bilde die HNF der Hilfsebene und setze den Aufpunkt B von h in die Abstandsformel der HNF ein.

Beispiel: (Nach Aufgabe S.144/13a)

Gegeben sind die Punkte $A (-9 \mid 3 \mid -3)$, $B (-3 \mid -6 \mid 0)$, $C (-7 \mid 5 \mid 5)$ und $D (4 \mid 8 \mid 0)$.

Berechnen Sie den Abstand der Geraden AB und CD

Lösung: Die Geraden $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{X} = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ sind windschief

(wird hier nicht gezeigt!).

Für die Hilfsebene E , die g enthält und zu h parallel ist, muss man zunächst den

Normalenvektor \vec{n} mit Hilfe des Vektorprodukts der beiden Richtungsvektoren \vec{u} und \vec{v} ermitteln:

$$\begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 \\ 63 \\ 117 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

Als Aufpunkt wählt man den Aufpunkt A der Geraden g und bildet die Vektordarstellung der Ebene:

$$E: \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 13 \end{pmatrix} \circ \left[\vec{X} - \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \right] = 0 \text{ und damit die Koordinatendarstellung: } E: 4x_1 + 7x_2 + 13x_3 + 54 = 0.$$

Die HNF ergibt sich leicht zu $E: \frac{-4x_1 - 7x_2 - 13x_3 - 54}{3\sqrt{26}} = 0$.

Der letzte Schritt ist es nun, die Koordinaten des Aufpunktes B von h in die Abstandsformel

der HNF von E einzusetzen: $d(B, E) = \left| \frac{-4 \cdot (-7) - 7 \cdot 5 - 13 \cdot 5 - 54}{3\sqrt{26}} \right| = \left| \frac{-126}{3\sqrt{26}} \right| \approx 8,24LE$.

5.9. Schnittwinkel

Bestimmung des Schnittwinkels zwischen zwei Geraden

Der Schnittwinkel zweier Geraden $g: \vec{X} = \vec{A} + \lambda \cdot \vec{u}$ und $h: \vec{X} = \vec{B} + \mu \cdot \vec{v}$ ist gleich dem spitzen Winkel α , den die Richtungsvektoren \vec{u} und \vec{v} festlegen.

Für den Winkel α gilt dann: $\cos \alpha = \frac{|\vec{u} \circ \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$.

Bestimmung des Schnittwinkels zwischen Gerade und Ebene

Um den Schnittwinkel α zwischen der Geraden $g: \vec{X} = \vec{A} + \lambda \cdot \vec{u}$ und der Ebene

$E: \vec{n} \circ (\vec{X} - \vec{B}) = 0$ zu ermitteln, berechnet man zunächst den spitzen Winkel β , den der

Richtungsvektor \vec{u} der Geraden g mit dem Normalenvektor \vec{n} der Ebene E einschließt.

Es gilt dann: $\alpha = 90^\circ - \beta$.

Für die Winkel α und β gilt dann: $\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha) = \cos \beta = \frac{|\vec{u} \circ \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|}$

Bestimmung des Schnittwinkels zweier Ebenen

Der Schnittwinkel zwischen zwei Ebenen $E_1: \vec{n}_1 \circ (\vec{X} - \vec{A}) = 0$ und $E_2: \vec{n}_2 \circ (\vec{X} - \vec{B}) = 0$ ist gleich dem spitzen Winkel α , den die Normalenvektoren \vec{n}_1 und \vec{n}_2 einschließen.

Für den Winkel α gilt dann: $\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_1 \circ \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$.

Übung: Nach S.148/4a: Berechnen Sie den Schnittwinkel den Ebenen $E_1 : \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \left[\vec{X} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0$ und

$$E_2 : \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \left[\vec{X} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \right] = 0.$$

Es genügt folgender Ansatz: $\cos \alpha = \frac{\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right|} = \frac{30}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{37}} \approx 0,967 \Rightarrow \alpha \approx 14,71^\circ$