

1. Graphen gebrochen rationaler Funktionen

1.1. Verhalten in der Umgebung von Definitionslücken

Definition 1:

Funktionen der Form $f: x \rightarrow \frac{p(x)}{q(x)}$ mit zwei Polynomen $p(x)$ und $q(x)$ heißen

gebrochen rationale Funktionen.

Die Nullstellen des Nennerpolynoms $q(x)$ können nicht in der **Definitionsmenge** D_f enthalten sein und werden deshalb als **Definitionslücken** bezeichnet.

Definition 2:

Wenn an einer Definitionslücke x_0 einer gebrochen rationalen Funktion f

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \quad \text{oder} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$$

$<$ $<$

und

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \quad \text{oder} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$$

$>$ $>$

gilt, so nennt man die Definitionslücke x_0 eine **Polstelle** von f und die Gerade mit der Gleichung $x = x_0$ **senkrechte Asymptote** des Graphen von f .

Beachten Sie:

Es gibt damit vier Arten von Polstellen:

Polstelle mit Vorzeichenwechsel $(-\infty / +\infty)$ bzw. $(+\infty / -\infty)$

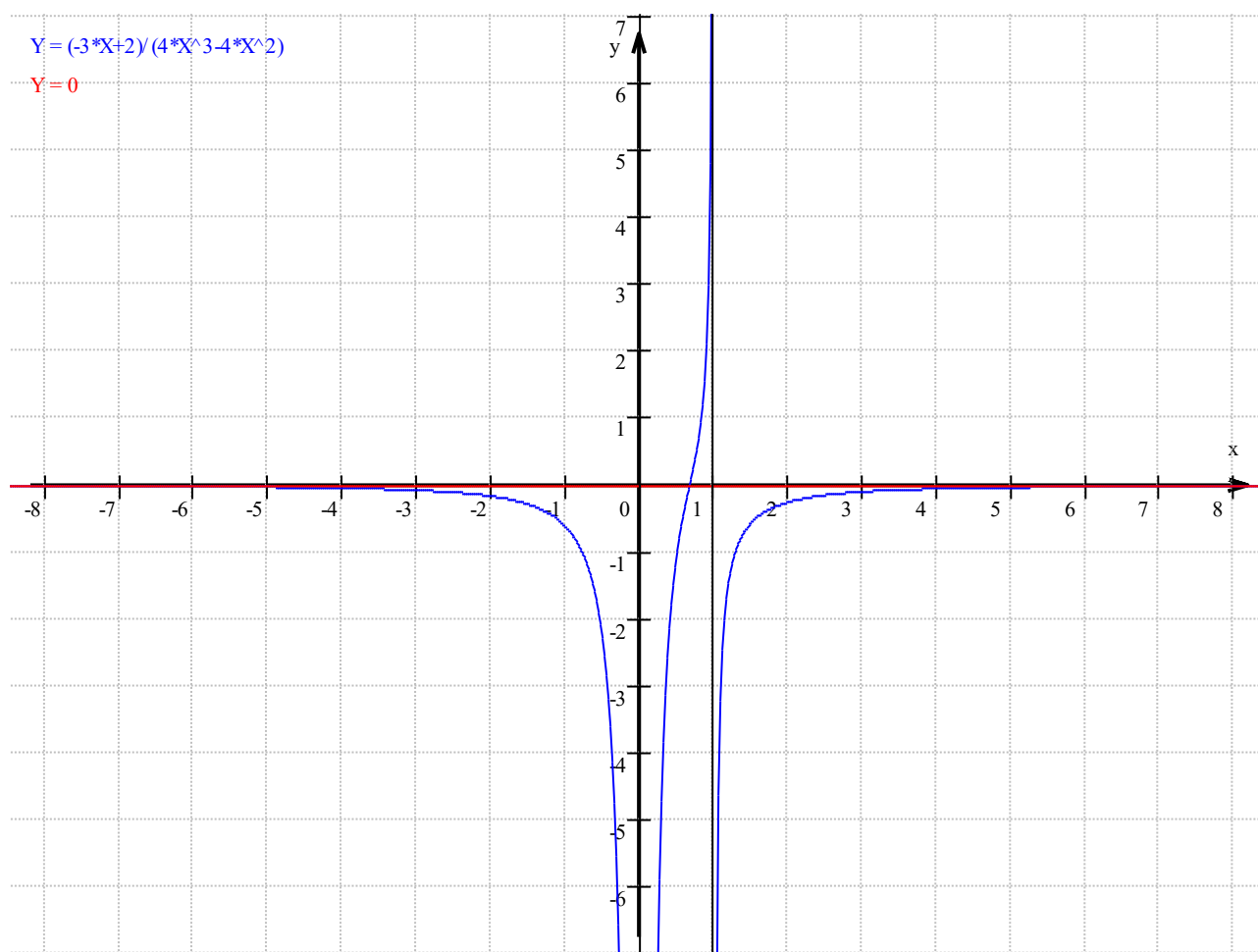
Polstelle ohne Vorzeichenwechsel $(+\infty / +\infty)$ bzw. $(-\infty / -\infty)$.

Übungsaufgabe

Untersuchen Sie die Funktion $f: x \rightarrow \frac{2-3x}{4x^3-4x^2}$. Beachten Sie dabei folgende Schritte:

- (a) Faktorisieren des Nenners (in ein Produkt umwandeln)
- (b) Bestimmen der Definitionslücken bzw. des Definitionsbereichs D_f
- (c) Bestimmen des Typs der Polstelle bzw. der hebbaren Definitionslücke
- (d) Zeichnen des Graphen (waagrechte & senkrechte Asymptoten)

Graph:



Definition 3:

Gilt für eine Funktion f

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ <}} f(x) = a$$

und

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ >}} f(x) = a$$

so schreibt man in zusammenfassender Form:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$$

Ist x_0 Definitionslücke von f, so heißt diese dann (stetig) **hebbare Definitionslücke**.

1.2. Verhalten im Unendlichen

Der Graph einer gebrochen rationalen Funktion $f: x \rightarrow \frac{P(x)}{q(x)}$, wobei z der Grad von p

und n der Grad von q ist, hat für $|x| \rightarrow \pm\infty$ im Fall

$z < n$	die x-Achse als Asymptote,
$z = n$	eine waagrechte Asymptote, die nicht die x-Achse ist,
$z = n+1$	eine schräge Asymptote,
$z > n+1$	keine waagrechte oder schräge Asymptote.

Beispiele :

(a) $f: x \rightarrow \frac{2x}{x^2-1}$

$z = 1; n = 2$

x-Achse ist waagrechte Asymptote

(b) $f: x \rightarrow \frac{2x^2}{4x^2-4}$

$z = n = 2$

Eine Gerade (nicht x-Achse) ist waagrechte Asymptote

(c) $f: x \rightarrow \frac{x^2+1,5x}{2x-1}$

$z = 2; n = 1$

schräge Asymptote

(d) $f: x \rightarrow \frac{x^3+0,5x^2+2x}{2x-1}$

$z = 3; n = 1$

keine waagrechte oder schräge Asymptote

1.3. Zusammenhang von Graphen und Termen

Erkenntnisse über den Graphen einer gebrochen rationalen Funktion erhalten wir durch Untersuchen auf:

Was will ich?

- Definitionslücken
- Schnittpunkt(e) mit der x-Achse
- Schnittpunkt mit der y-Achse
- Waagrechte bzw. schräge Asymptoten
- Verhalten an senkrechten Asymptoten
- Symmetrieeigenschaften:

Was muss ich tun?

Nullstellen des Nenners

Polstelle / stetig hebbare Def.lücke?

Nullstellen des Zählers

$f(0)$

Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$

Verhalten für $x \rightarrow \text{Polstelle}$

Achsensymmetrie: $f(x) = f(-x)$

Punktsymmetrie: $f(-x) = -f(x)$

Übung:

Untersuchen Sie die gebrochen rationale Funktion: $f(x) = \frac{2x+6}{x^2-9}$ und skizzieren Sie deren Graphen. Zeichnen Sie auch alle Asymptoten ein!

2. Einführung in die Differentialrechnung

2.1. Differenzenquotient und mittlere Änderungsrate

Ist die Funktion f auf dem Intervall $[a; b]$ definiert, so heißt $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ der Differenzenquotient oder die mittlere Änderungsrate von f im Intervall $[a; b]$.

Anschaulich entspricht $m = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ der Steigung der Sekante durch die Graphenpunkte $P(a|f(a))$ und $Q(b|f(b))$.

2.2. Differentialquotient und lokale Änderungsrate

Definition:

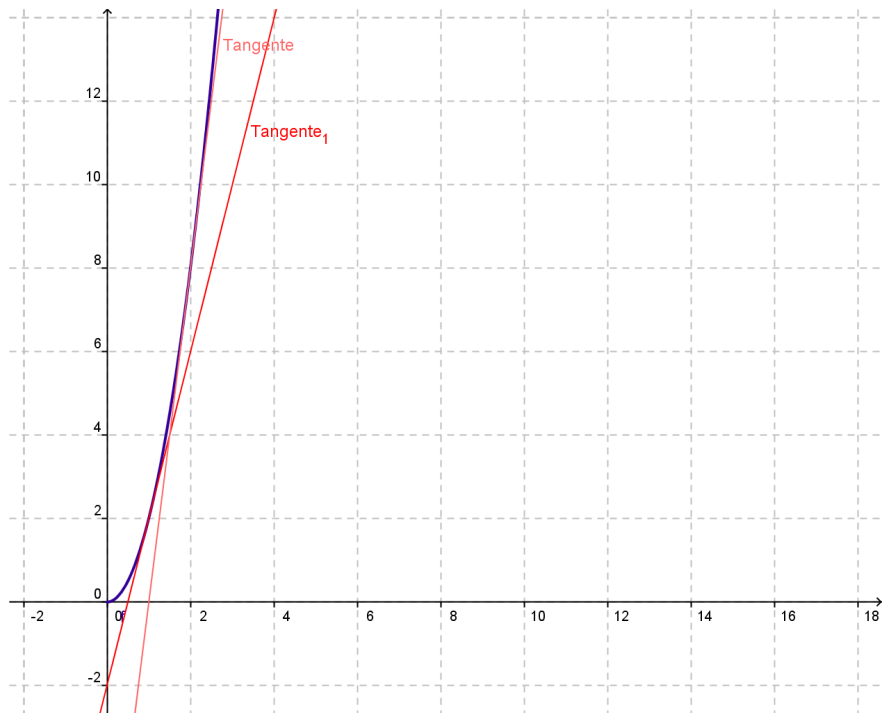
Wenn für eine Funktion f an der Stelle x_0 der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ der mittleren Änderungsrate existiert, dann heißt er **Differentialquotient** oder **lokale (momentane) Änderungsrate von f an der Stelle x_0** und wird meist mit m_{x_0} bezeichnet.

Die Gerade durch den Punkt $P_0(x_0|f(x_0))$ mit der Steigung m_{x_0} heißt **Tangente** an den Graphen in P.

Die Tangentensteigung m_{x_0} wird als **Steigung des Graphen im Punkt $P_0(x_0|f(x_0))$** bezeichnet.

Beispiel:

Ein Körper bewegt sich so, dass er in der Zeit t den Weg $s(t) = 2t^2$ (t in Sekunden, $s(t)$ in Meter) zurücklegt. Bestimmen Sie seine momentanen Geschwindigkeiten zu den Zeiten $t_0 = 1, t_1 = 2, t_2 = 3$.



2.3. Differenzierbarkeit

Wenn für eine Funktion f an der Stelle x_0 den Differentialquotienten bzw. die lokale (momentane) Änderungsrate $m_{x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ besitzt, so heißt f an der Stelle x_0 **differenzierbar** oder **ableitbar**.

Wir nennen den Grenzwert m_{x_0} die **Ableitung von f an der Stelle x_0** und schreiben dafür $f'(x_0)$.

Ist eine Funktion f für alle Werte x_0 aus einem Intervall I differenzierbar, so nennen wir f eine auf dem Intervall I **differenzierbare Funktion**.

Zu einer differenzierbaren Funktion f sind die Gleichungen für die Tangente t und die Normale n in $P_0(x_0 | f(x_0))$:

$$\text{Tangente} \quad t: y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

$$\text{Normale} \quad n: y = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

Übung:

Bestimmen Sie für die Funktion $f(x) = x^2 - 4x$ die Ableitung $f'(3)$ mit Hilfe einer konkreten Grenzwertbestimmung $m_3 = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$.

$$m_3 = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3}.$$

Ermitteln Sie anschließend allgemein $m_{x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Geben Sie nun den Term der Ableitungsfunktion $f'(x)$ an.

Einfache Übung:

S.39/5

Anspruchsvolle Übung:

S. 39/9

2.4. Ableitungsfunktion

Definition:

Zu einer Funktion f heißt die Funktion $f': x \rightarrow f'(x)$ die Ableitungsfunktion oder kurz die Ableitung von f .

2.5. Stammfunktion

Eine Funktion F bezeichnen wir als Stammfunktion von f , wenn F und f denselben Definitionsbereich besitzen und es gilt:

$$F'(x) = f(x).$$

2.6. Ableitung der Funktion $x \mapsto x^n$ ($n \in \mathbb{Z}$)

Satz:

Eine Funktion $f : x \mapsto x^n$ ($n \in \mathbb{Z}$) besitzt die Ableitung $f' : x \mapsto n \cdot x^{n-1}$.

2.7. Summenregel und Faktorregel

Satz:

Sind die Funktionen g und h differenzierbar, so gilt:

Summenregel: $f(x) = g(x) + h(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x) + h'(x)$

Faktorregel: $f(x) = c \cdot g(x) \Rightarrow f'(x) = c \cdot g'(x) \quad (c \in \mathbb{R})$

2.8. Produktregel und Quotientenregel

Satz:

Sind die Funktionen u und v differenzierbar, so gilt:

Produktregel: $f(x) = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

Satz:

Sind die Funktionen u und v differenzierbar, so gilt für alle x mit $v(x) \neq 0$:

Quotientenregel: $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$

2.9. Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Definition:

Ist eine Funktion in einem Intervall $[a; b]$ definiert, so heißt sie an der Stelle $x_0 \in [a; b]$ stetig, wenn der Grenzwert von $f(x)$ für $x \rightarrow x_0$ existiert und mit dem Funktionswert $f(x_0)$ übereinstimmt, wenn also gilt: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Satz über den Zusammenhang zwischen Stetigkeit und Differenzierbarkeit:

Ist eine Funktion f an der Stelle x_0 differenzierbar, so ist f an der Stelle x_0 stetig.

WICHTIG: Die Umkehrung dieses Satzes gilt nicht!

(Betragsfunktion $f : x \mapsto |x|$ ist stetig an der Stelle $x_0 = 0$, aber nicht differenzierbar!)

3. Anwendungen der Ableitung

3.1. Monotonie

Definition:

Eine Funktion f heißt

streng monoton zunehmend

streng monoton abnehmend

in einem Intervall I des Definitionsbereichs, wenn für alle $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ gilt:

$$f(x_1) < f(x_2)$$

$$f(x_1) > f(x_2).$$

Gilt $f(x_1) \leq f(x_2)$,

Gilt $f(x_1) \geq f(x_2)$,

so heißt f **monoton zunehmend** in I .

so heißt f **monoton abnehmend** in I .

Satz: (Monotoniekriterium)

Die Funktion f sei im Intervall I differenzierbar. Wenn für alle $x \in I$ gilt:

$$f'(x) > 0,$$

$$f'(x) < 0,$$

dann ist f streng monoton zunehmend in I .

dann ist f streng monoton abnehmend in I .

3.2. Extremstellen, Extremwerte

Definition:

Der Funktionswert $f(x_0)$ heißt

lokales Maximum von f ,

lokales Minimum von f ,

wenn es eine Umgebung $U(x_0)$ gibt, so dass alle Werte $x \in U(x_0)$ aus dem Definitionsbereich gilt:

$$f(x) \leq f(x_0)$$

$$f(x) \geq f(x_0).$$

Ist der Funktionswert $f(x_0)$ ein Maximum oder Minimum, nennt man ihn auch **Extremwert** und x_0 eine **Extremstelle**.

Der Punkt $P_0(x_0 | f(x_0))$ des zu f gehörenden Graphen heißt **Extrempunkt**.

Im Falle des Maximums heißt P_0 **Hochpunkt**.

Im Falle des Minimums heißt P_0 **Tiefpunkt**.

3.3. Bedingungen für Extrema

Satz:

Ist die Funktion f auf einem Intervall $I =]a; b[$ differenzierbar und ist x_0 eine innere Stelle von I ,

d.h. $x_0 \in]a; b[$, so gilt:

Wenn f an der Stelle x_0 einen Extremwert hat, dann ist $f'(x_0) = 0$.

Satz:

Die Funktion f sei auf einem Intervall $I =]a; b[$ differenzierbar und x_0 eine innere Stelle von I , d.h. $x_0 \in]a; b[$.

Wenn $f'(x_0) = 0$ ist und f' bei x_0 einen

Vorzeichenwechsel

von + nach – hat,

dann hat die Funktion f ein

lokales Maximum an der Stelle x_0 .

Wenn $f'(x_0) = 0$ ist und f' bei x_0 einen

Vorzeichenwechsel

von – nach + hat,

dann hat die Funktion f ein

lokales Minimum an der Stelle x_0 .

3.4. Funktionsuntersuchungen rationaler Funktionen

Bestimmen Sie bei einer Kurvendiskussion stets folgende Aspekte einer rationalen Funktion:

- (1) Definitionsbereich
- (2) Symmetrie
- (3) Schnittpunkte mit den Achsen
- (4) Verhalten an den Definitionslücken
- (5) Verhalten im Unendlichen
- (6) Extremwerte und Monotonie
- (7) Graph

Ergänzung:

Globales Extremum

Gilt die Bedingung $f(x) \leq f(x_0)$ bzw. $f(x) \geq f(x_0)$ für alle Werte aus dem Definitionsbereich D_f , dann heißt $f(x_0)$ auch **globales** oder **absolutes Maximum** von f bzw. **globales** oder **absolutes Minimum** von f in D_f .

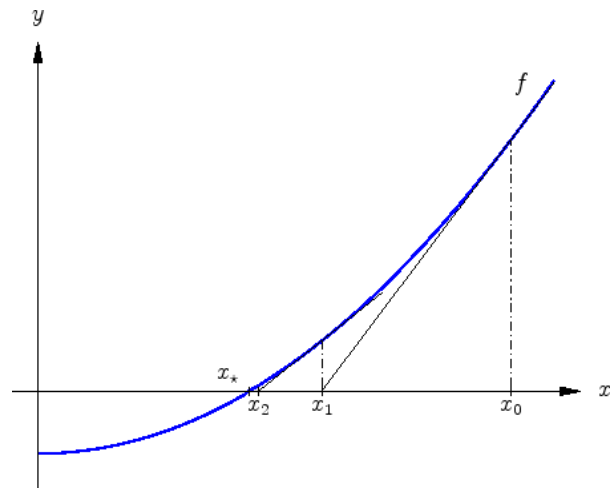
Ein globales Extremum an einer Randstelle von D_f nennt man **globales Randextremum**, ein lokales Extremum am Rand nennt man ein **lokales Randextremum**.

3.5. Das Newton-Verfahren

Wenn sich die Nullstellen einer Funktion nicht durch das (algorithmische) Lösen der Gleichung $f(x) = 0$ bestimmen lassen, kann man mit Hilfe eines rechnerischen Verfahrens schrittweise einen Näherungswert für eine Nullstelle ermitteln.

Das vorgestellte Newton-Verfahren geht davon aus, dass die Nullstelle x_1 einer an einem beliebigen Graphenpunkt $P(x_0 | f(x_0))$ angelegten Tangente dabei schrittweise eine bessere Näherung für eine Nullstelle x_* der Ausgangsfunktion ist.

Graphisch lässt sich das wie folgt veranschaulichen:



Schrittweise ermitteln wir nun den Term dieses Iterationsverfahrens:

Die Tangentengleichung in $P(x_0 | f(x_0))$ ist wie bekannt: $y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

Die Nullstelle dieser Tangente lässt sich ermitteln, indem wir $y = 0$ setzen und nach x auflösen:

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) \xrightarrow{y=0} 0 = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) \Leftrightarrow x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Das so ermittelte x ist der erste Näherungswert x_1 für die gesuchte Nullstelle x_* .

Wir notieren also damit für den Startwert x_0 den Term: $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$.

Wichtig ist, dass $f'(x_0) \neq 0$. Wiederholen wir nun dieses Verfahren mit x_1 als Startwert ergibt sich

$$\text{dann analog: } x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Allgemein lautet damit die Iterationsvorschrift:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, n \in \mathbb{N}_0. \text{ (Hier ist im Buch auf S. 81 ein Fehler!)}$$

Hat die differenzierbare Funktion f eine Nullstelle, so kann man diese näherungsweise mit dem **Newton-Verfahren** bestimmen. Die Iterationsvorschrift mit dem Startwert x_0 lautet:

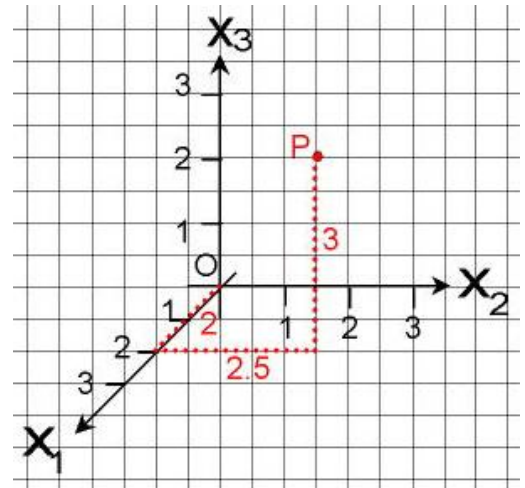
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, n \in \mathbb{N}_0$$

4. Koordinatengeometrie im Raum

4.1. Das dreidimensionale Koordinatensystem

Zur Beschreibung der Lage von Punkten im Raum benötigen wir ein dreidimensionales Koordinatensystem, dessen paarweise senkrecht aufeinander stehende Achsen wir mit x_1, x_2 und x_3 bezeichnen.

Die Koordinaten eines Punktes P werden als Zahlentripel $(p_1 | p_2 | p_3)$ angegeben. Wir notieren: $P(p_1 | p_2 | p_3)$.



4.2. Vektoren

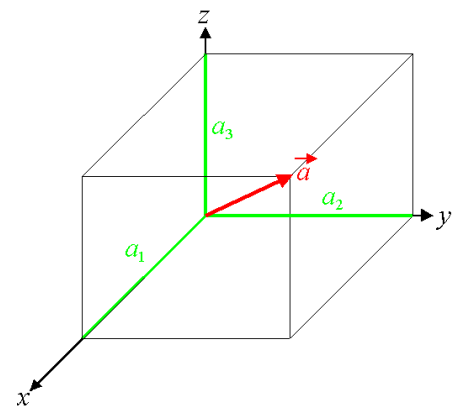
Die Menge aller zueinander paralleler, gleich langer und gleich gerichteter Pfeile bezeichnen wir als **Vektor**. Jeder einzelne Pfeil heißt **Repräsentant** des Vektors. Vektoren werden häufig mit kleinen Buchstaben und einem Pfeil darüber bezeichnet, z.B. $\vec{a}, \vec{v}$.

Ein Vektor in der Ebene (im Raum) wird vollständig beschrieben durch die Angabe von zwei (drei) Koordinaten. Man schreibt

$$\text{z.B.: } \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \text{ bzw. } \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

Sind die Repräsentanten zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zueinander parallel und gleich lang, aber entgegengesetzt gerichtet, so heißt $\vec{b}$ **Gegenvektor** zu $\vec{a}$ (und umgekehrt). Wir schreiben: $\vec{b} = -\vec{a}$ bzw. $\vec{a} = -\vec{b}$.

Derjenige Vektor, bei dem Fußpunkt und Spitze zusammenfallen, heißt **Nullvektor** $\vec{o}$.



4.3. Addition und Subtraktion von Vektoren

Bei der Addition von Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ erhalten wir einen Repräsentanten des Summenvektors $\vec{a} + \vec{b}$, indem wir Repräsentanten von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aneinanderfügt („vom Fußpunkt von $\vec{a}$ zur Spitze von $\vec{b}$ “). Für den Summenvektor gilt:

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

Die Addition des Gegenvektors $-\vec{b}$ zu $\vec{a}$ bezeichnet man als Subtraktion von Vektoren.

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -b_1 \\ -b_2 \\ -b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix}$$

4 Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl (S-Multiplikation)

Für einen Vektor $\vec{a}$ ($\vec{a} \neq \vec{0}$) und eine reelle Zahl r ($r \neq 0$) bezeichnet man mit $r \cdot \vec{a}$ den Vektor, dessen Repräsentanten

$|r|$ – mal so lang sind wie die Repräsentanten von $\vec{a}$,

Parallel zu den Repräsentanten von $\vec{a}$ sind,

Gleich gerichtet zu den Repräsentanten von $\vec{a}$ sind, falls $r > 0$ und

entgegengesetzt gerichtet zu den Repräsentanten von $\vec{a}$ sind, falls $r < 0$.

S-Multiplikation in Koordinatendarstellung

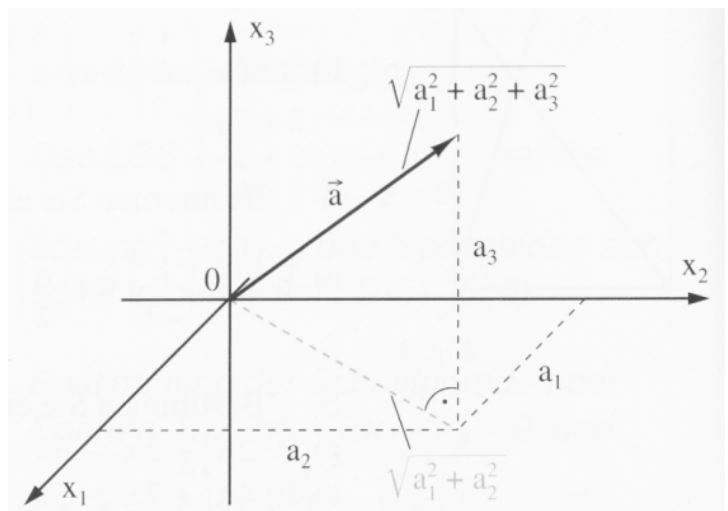
Für einen Vektor $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und eine reelle Zahl r gilt: $r \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot a_1 \\ r \cdot a_2 \\ r \cdot a_3 \end{pmatrix}$.

5 Betrag von Vektoren, Länge von Strecken**Definition:**

Unter dem Betrag eines Vektors $\vec{a}$ verstehen wir die Länge eines zu $\vec{a}$ gehörenden Repräsentanten.

Der Betrag von $\vec{a}$ wird mit $|\vec{a}|$ bezeichnet.

Für $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ gilt: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

**6. Skalarprodukt von Vektoren, Größe von Winkeln****Definition:**

Ist φ der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, so heißt die reelle Zahl

$$\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$$

Das **Skalarprodukt** von $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Koordinatendarstellung des Skalarprodukts

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

Die Koordinatendarstellung des Skalarprodukts ermöglicht es, die Größe des Winkels zwischen zwei Vektoren direkt aus ihren Koordinaten zu berechnen.

$$\text{Es gilt: } \cos \varphi = \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$$

Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ heißen zueinander **orthogonal** (senkrecht), wenn sie einen Winkel von 90° einschließen. Wir notieren: $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Satz:

Für $\vec{a}$ und $\vec{b}$ mit $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$ gilt: $\vec{a} \perp \vec{b}$ genau dann, wenn $\vec{a} \circ \vec{b} = 0$.

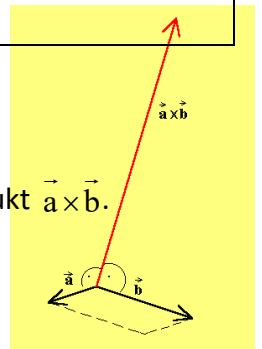
Für das Skalarprodukt gelten folgende Regeln bzw. Gesetze:

- (1) Kommutativgesetz: $\vec{a} \circ \vec{b} = \vec{b} \circ \vec{a}$
- (2) Distributivgesetz: $(r \cdot \vec{a}) \circ \vec{b} = r \cdot (\vec{a} \circ \vec{b})$ bzw. $(\vec{a} + \vec{b}) \circ \vec{c} = \vec{a} \circ \vec{c} + \vec{b} \circ \vec{c}$
- (3) Positiv definit: $\vec{a} \circ \vec{a} = |\vec{a}|^2$, also: $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \circ \vec{a}}$ und damit $\vec{a} \circ \vec{a} \geq 0$

7. Das Vektorprodukt

Für $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ nennen wir den Vektor $\begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$ das Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$.

Der Vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ ist orthogonal zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$.



Satz:

Die Maßzahl des Flächeninhalts des von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms beträgt:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi.$$

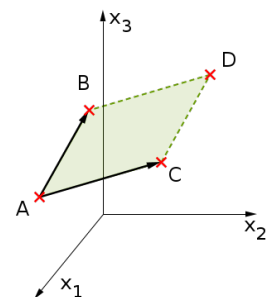
Die Maßzahl des Volumens des von den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Spats beträgt:

$$|(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}|.$$

Im Besonderen gilt damit:

Der Flächeninhalt A_{ABCD} eines Parallelogramms ABCD, das von den Punkten A, B und C und ihren Verbindungsvektoren im $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BC}$ im **3-Dimensionalen** aufgespannt wird, berechnet sich über:

$$A_{ABCD} = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}|.$$



8. Kreise und Kugeln im Koordinatensystem

Kreis- und Kugelgleichung in Vektor- und Koordinatendarstellung

Ein Kreis im $\mathbb{R}^2$ mit dem Mittelpunkt $M(m_1 | m_2)$ und dem Radius r wird beschrieben durch:

$$(\vec{X} - \vec{M})^2 = r^2 \text{ bzw. } (x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 = r^2.$$

Eine Kugel im $\mathbb{R}^3$ mit dem Mittelpunkt $M(m_1 | m_2 | m_3)$ und dem Radius r wird beschrieben durch:

$$(\vec{X} - \vec{M})^2 = r^2 \text{ bzw. } (x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 + (x_3 - m_3)^2 = r^2.$$

5. Weitere Ableitungsregeln

5.1. Ableiten der Sinus- und Kosinusfunktion

Satz:

Für die Funktion $f : x \mapsto \sin x$ gilt: $f'(x) = \cos x$

Für die Funktion $f : x \mapsto \cos x$ gilt: $f'(x) = -\sin x$

5.2. Die Umkehrfunktion

Definition

Eine Funktion $f : x \mapsto f(x)$ mit der Definitionsmenge D_f und der Wertemenge W_f heißt **umkehrbar**, falls es zu jedem $y \in W_f$ genau ein $x \in D_f$ mit $f(x) = y$.

Ist eine Funktion umkehrbar, so ist die umgekehrte Zuordnung eine Funktion. Diese heißt **Umkehrfunktion** von f und wird mit f^{-1} bezeichnet.

Bestimmen des Funktionsterms von $f^{-1}(x)$:

1. Auflösen der Funktionsgleichung $f(x) = y$ nach x .
2. Vertauschen von x und y , wobei y nun für den Funktionswert von f^{-1} steht.

Beachte: Falls es zu einem y -Wert y_0 mindestens zwei Werte x_1 und x_2 gibt mit

$f(x_1) = f(x_2) = y_0$ gibt, so ist f **nicht umkehrbar**!

Satz: (Kriterium für Umkehrbarkeit)

Ist eine Funktion f streng monoton, so ist sie umkehrbar.

Insbesondere ist jede differenzierbare Funktion f , für die $f'(x) > 0$ für alle x in einem Intervall (bzw. $f'(x) < 0$ für alle x in einem Intervall), in diesem Intervall umkehrbar.

3. Verkettung von Funktionen

Definition:

Für zwei Funktionen $v : x \mapsto v(x)$ und $u : x \mapsto u(x)$ heißt die Funktion $u \circ v : x \mapsto u(v(x))$

Verkettung oder Hintereinanderausführung der Funktionen u und v .

Die Definitionsmenge von $u \circ v$ besteht nur aus allen $x \in D_v$, für die $v(x)$ zu D_u gehört.

4. Ableitung von verketteten Funktionen**Satz: (Kettenregel)**

Ist $f = u \circ v$ eine Verkettung zweier differenzierbarer Funktionen u und v , so ist auch f differenzierbar, und es gilt für

$$f(x) = (u \circ v)(x) = u(v(x)):$$

$$f'(x) = (u \circ v)'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x).$$

5. Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten und ihre Ableitung**Definition:**

Funktionen der Form

$f: x \mapsto a \cdot x^{\frac{p}{q}} = a \cdot \sqrt[q]{x^p}$, ($a \in \mathbb{R}, q \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{N}$) heißen Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten.

Satz: (Ableitungsregel für Potenzfunktionen)

Für Funktionen $f: x \mapsto a \cdot x^{\frac{p}{q}} = a \cdot \sqrt[q]{x^p}$, ($a \in \mathbb{R}, q \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{N}$) gilt:

$$f'(x) = \frac{p}{q} \cdot a \cdot x^{\frac{p}{q}-1}.$$

Für $x \in \mathbb{R}_0^+$ hat die Funktion $f: x \mapsto x^{\frac{p}{q}}$ als Umkehrfunktion die Funktion $f^{-1}: x \mapsto x^{\frac{q}{p}}$.

6. Natürliche Exponential- und Logarithmusfunktion

6.1. Die natürliche Exponentialfunktion und ihre Ableitung

Der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ existiert und ist eine irrationale Zahl. Diese heißt **Euler'sche Zahl** und wird mit e bezeichnet.

Ein Näherungswert ist: $e = 2,718281828\dots$

Satz:

Die natürliche Exponentialfunktion $f: x \mapsto e^x$ hat die Ableitungsfunktion $f': x \mapsto e^x$.

Eine mögliche Stammfunktion ist $F: x \mapsto e^x$.

6.2. Die natürliche Logarithmusfunktion und ihre Ableitung

Definition:

In der Exponentialgleichung $e^x = y$ nennt man die Hochzahl x den natürlichen Logarithmus von y .

Wir notieren: $x = \ln y$.

Die Umkehrfunktion der natürlichen Exponentialfunktion heißt natürliche Logarithmusfunktion.

Sie wird mit $x \mapsto \ln x, x \in \mathbb{R}^+$ bezeichnet.

Satz:

Die natürliche Logarithmusfunktion $f: x \mapsto \ln x, x \in \mathbb{R}^+$, hat die Ableitungsfunktion $f': x \mapsto \frac{1}{x}$.

Eine Stammfunktion der Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{x}$ (für $x \neq 0$) ist die Funktion $F: x \mapsto \ln|x|$.

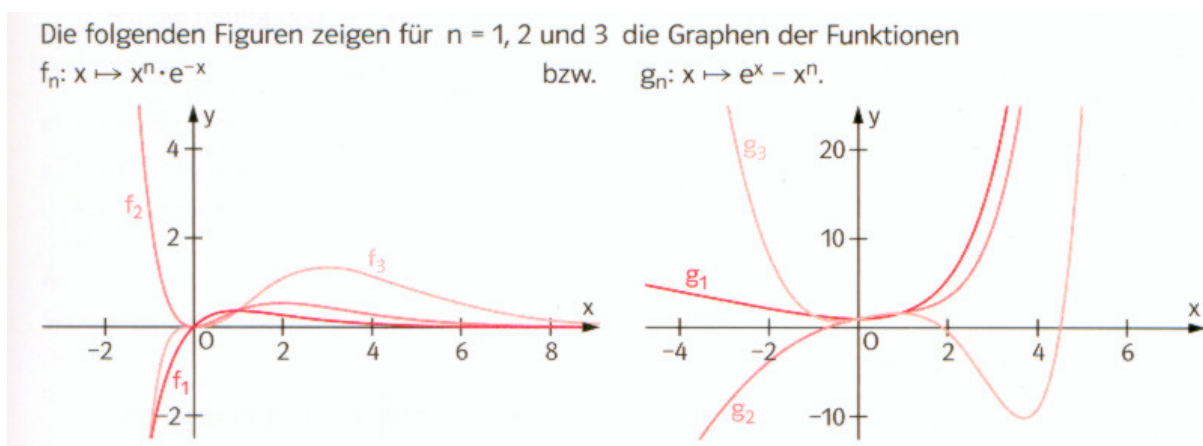
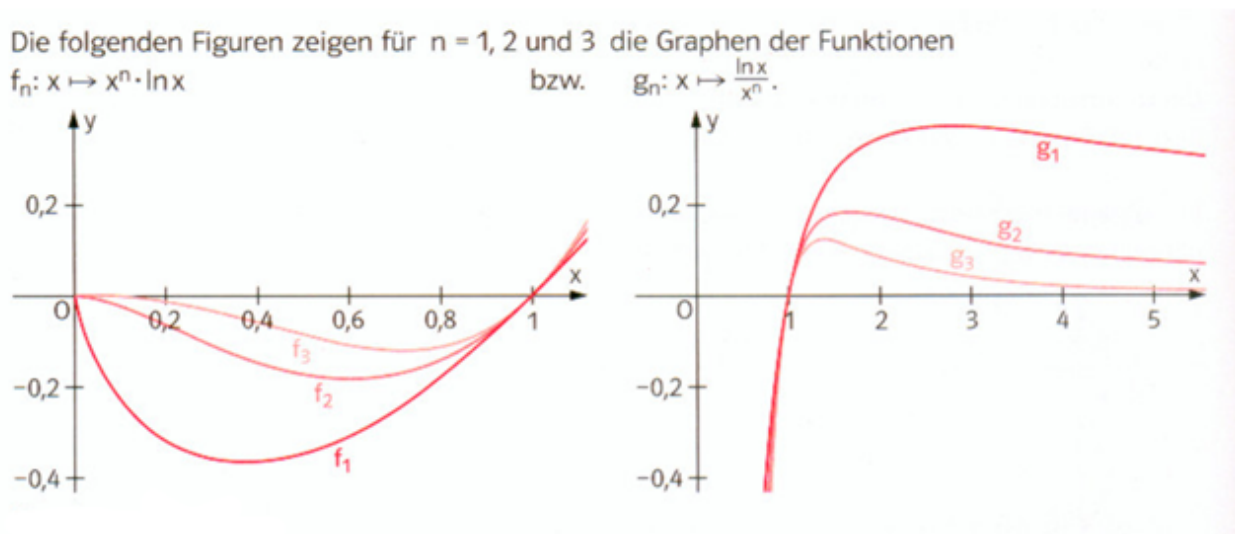
6.3. Ableiten zusammengesetzter Funktionen

Satz:

Ist $v: x \mapsto v(x)$ eine differenzierbare Funktion, so lassen sich die Verkettungen $f: x \mapsto e^{v(x)}$ mit der natürlichen Exponentialfunktion bzw. $g: x \mapsto \ln[v(x)]$ mit der natürlichen Logarithmusfunktion (wobei gelten muss: $v(x) > 0$) mit der Kettenregel ableiten.

Für $f(x) = e^{v(x)}$ gilt: $f'(x) = e^{v(x)} \cdot v'(x)$

Für $g(x) = \ln[v(x)]$ gilt: $g'(x) = \frac{v'(x)}{v(x)}$.

6.4. Exponentialfunktionen und ExponentialgleichungenSatz:Für alle $x \in \mathbb{R}^+$ gilt: $e^{\ln x} = x$ Für alle $x \in \mathbb{R}^+$ gilt: $\ln e^x = x$.**6.5. Exponential- und Logarithmusfunktionen und ihre Graphen**Satz:Für alle $r \in \mathbb{R}^+$ gilt: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^r}{e^x} = 0$ und $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x^r) = +\infty$.Bemerkung: Dies bedeutet, dass e^x für $x \rightarrow +\infty$ „schneller“ wächst als jede Potenz x^r ($r \in \mathbb{R}^+$).Satz:Für alle $r \in \mathbb{R}^+$ gilt: $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^r \cdot \ln x) = 0$ und $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^r} = 0$.Bemerkung: Der letzte Grenzwert bedeutet, dass $\ln x$ für $x \rightarrow +\infty$ „langsamer“ wächst als jede Potenz x^r ($r \in \mathbb{R}^+$).

7. Wahrscheinlichkeitsbegriff und Unabhängigkeit

7.1. Axiomatische Definition von Wahrscheinlichkeit

Eine Funktion $P: A \mapsto P(A)$ mit $A \subset Q$ und $P(A) \in \mathbb{R}$ heißt **Wahrscheinlichkeitsverteilung**, wenn sie folgende Bedingungen erfüllt:

Axiome von Kolmogorow:

- (1) $P(A) \geq 0$
- (2) $P(Q) = 1$
- (3) Wenn $A \cap B = \{ \}$, dann muss gelten: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Beachte: Q ist die **Ergebnismenge**, deren Teilmengen (hier A bzw. B) **Ereignisse** genannt werden.

Insgesamt gibt es $2^{|Q|}$ Ereignisse!

7.2. Zusammengesetzte Ereignisse

Sprechweisen	Symbolschreibweise	Grafische Veranschaulichung in der Vierfeldertafel	Grafische Veranschaulichung im Mengendiagramm
Gegenereignis zu A ; Nicht das Ereignis A	$\bar{A}$		
Ereignis A und Ereignis B ; Beide Ereignisse; Sowohl A als auch B	$A \cap B$		
Ereignis A oder Ereignis B ; Mindestens eines der beiden Ereignisse	$A \cup B$		
Ereignis A und nicht Ereignis B ; Ereignis A ohne Ereignis B	$A \cap \bar{B} = A \setminus B$		
Weder Ereignis A noch Ereignis B ; Keines der beiden Ereignisse	$\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B}$		
Nicht beide Ereignisse zugleich; Höchstens eines der beiden Ereignisse	$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$		
Entweder Ereignis A oder Ereignis B ; Genau eines der beiden Ereignisse	$(\bar{A} \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$		

Beachte: Die **Gesetze von de Morgan** beschreiben den Zusammenhang von $\cap$ und $\cup$:

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad \text{und} \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

7.3. Der Additionssatz

Für beliebige Ereignisse A und B gilt:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Viele Aufgaben in diesem Zusammenhang lassen sich mit Hilfe einer **Vierfeldertafel** lösen:

LS 11- S. 181/6

Eine Wälzlagerfabrik prüft die produzierten Wälzkörper auf Abweichungen im Durchmesser und in der Härte. Es sei D: Abweichungen im Durchmesser; H: Abweichungen in der Härte.

Bestimmen Sie die relative Häufigkeit der nicht einwandfreien Wälzkörper

Untersuchungsergebnis bei 100000 Wälzkörpern	
Abweichungen im Durchmesser	65
Abweichungen in der Härte	78
Abweichungen im Durchmesser und in der Härte	43

	D	$\overline{D}$	
H	43/100000	35/100000	78/100000
$\overline{H}$	22/100000	99900/100000	99922/100000
	65/100000	99935/100000	100000/100000

Gesucht ist: $P(H \cup D) = P(H) + P(D) - P(H \cap D) = 100/100000 = 0,1\%$.

7.4. Unabhängigkeit von Ereignissen

Zwei Ereignisse A und B heißen (stochastisch) unabhängig, wenn gilt:

$$P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B),$$

andernfalls nennt man A und B voneinander abhängig.

8. Anwendungen der Differentialrechnung

8.1. Ganzrationale Funktionen in realen Situationen

Bei der Bestimmung einer ganzrationalen Funktion für eine reale Situation muss ein lineares Gleichungssystem aufgestellt und gelöst werden. Dazu muss zunächst ein Koordinatensystem gewählt werden. Berücksichtigt man dabei vorhandene Besonderheiten (z.B. Symmetrie), so kann sich der Ansatz für den Funktionsterm vereinfachen.

Bsp.: Ein parabelförmiger Brückenbogen überspannt einen 50 m breiten Geländeeinschnitt. In A und B setzt der Bogen senkrecht zu den Böschungen auf.

- a) Beschreiben Sie die Form des Brückenbogens durch einen Funktionsterm und begründen Sie den Ansatz.
- b) Wie hoch ist der Brückenbogen?

8.2. Extremwertprobleme

Vorgehen beim Lösen von Extremwertproblemen:

- (1) Beschreiben der Größe, die extremal werden soll, durch einen Term, der mehrere Variablen enthalten kann.
- (2) Formulieren von gegebenen Nebenbedingungen.
- (3) Bestimmen der Zielfunktion, die nur noch von einer Variablen abhängt.
- (4) Untersuchen der Zielfunktion auf Extremwerte und Formulierung des Ergebnisses. Hier sind auch Randwerte zu berücksichtigen.

8.3. Komplexere Extremwertprobleme

Bei Extremwertproblemen können die Wahl der Variablen und die geeignete Verwendung von Nebenbedingungen entscheidend sein für die Einfachheit der Zielfunktion.

8.4. Funktionen mit Parametern

Enthält ein Funktionsterm außer der Variablen x noch eine weitere (von x unabhängige) Variable a , so gehört zu jedem möglichen Wert von a eine Funktion $f_a : x \mapsto f_a(x)$.

Die Variable a nennt man **Parameter**. Die Menge dieser Funktionen bezeichnen wir als **Funktionenschar**.

8.5. Funktionsbestimmungen

Um eine Funktion f zu bestimmen, die vorgegebene Eigenschaften hat, z.B.

- Punkte auf dem Graphen $f(x_0) = y_0$
- Extremstellen oder die Steigung des Graphen an einer Stelle
$$f'(x_0) = 0 \quad \text{oder} \quad f'(x_0) = c$$
- Nullstellen oder Polstellen, $f(x_0) = 0$ oder $q(x_0) = 0$ für $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$

Sind diese Eigenschaften (Bedingungen) mithilfe von f oder f' als Gleichungen zu formulieren und das aufgestellte Gleichungssystem zu lösen.

Die nötige Anzahl der Gleichungen wird durch die Zahl der Parameter im Funktionsterm bestimmt.

Die Berücksichtigung von besonderen Eigenschaften wie z.B.

- Symmetrie des Graphen,
- Existenz einer waagrechten Asymptote,

kann ggf. den Ansatz für den Funktionsterm vereinfachen.

8.6. Funktionsanpassung

Vorgehen bei einer Funktionsanpassung

- (1) Zur Veranschaulichung und zum Auffinden eines geeigneten Funktionstyps können die Daten in ein Koordinatensystem eingetragen werden.
- (2) Mithilfe von Parametern wird die Gleichung der vermuteten Funktion aufgestellt, deren Graph näherungsweise durch die gegebenen Punkte gehen soll.
- (3) Je nach Zahl der Parameter werden Koordinaten einer entsprechenden Zahl von Punkten in die Funktionsgleichung eingesetzt und das entsprechende Gleichungssystem gelöst.
- (4) Mithilfe der Koordinaten weiterer Punkte kann die Brauchbarkeit der gefundenen Funktion überprüft werden.