5.9. Schnittwinkel

Bestimmung des Schnittwinkels zwischen zwei Geraden

Der Schnittwinkel zweier Geraden $g: \overrightarrow{X} = \overrightarrow{A} + \lambda \cdot \vec{u}$ und $h: \overrightarrow{X} = \overrightarrow{B} + \mu \cdot \vec{v}$ ist gleich dem spitzen Winkel α, den die Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ festlegen.

Für den Winkel α gilt dann: $\cos\alpha = \frac{\left|\vec{u} \circ \vec{v}\right|}{\left|\vec{u}\right| \cdot \left|\vec{v}\right|}$.

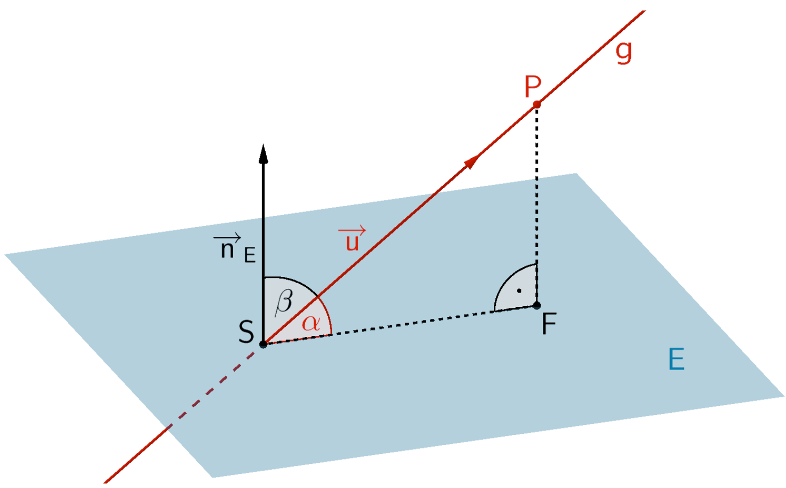
Die Formel für den Schnittwinkel der beiden Richtungsvektoren entspricht der Formel, die wir im letzten Jahr in der Q11 kennengelernt haben. Der Zähler ist der Betrag (=positiver Wert) des Skalarprodukts und der Nenner ist das Produkt aus den Längen der beiden beteiligten Produkten. Auch hier gilt wieder: Der Winkel ist 90°, wenn das Skalarprodukt den Wert Null ergibt, weil cos 90° = 0. Der Begriff „spitzer Winkel" umfasst Winkel mit der Größe zwischen 0° und 90°.

Bestimmung des Schnittwinkels zwischen Gerade und Ebene

Um den Schnittwinkel α zwischen der Geraden $g: \overrightarrow{X} = \overrightarrow{A} + \lambda \cdot \vec{u}$ und der Ebene $E: \vec{n} \circ \left(\overrightarrow{X} - \overrightarrow{B}\right) = 0$ zu ermitteln, berechnet man zunächst den spitzen Winkel β, den der Richtungsvektor $\vec{u}$ der Geraden g mit dem Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene E einschließt.
Es gilt dann: $\alpha = 90° - \beta$.

Für die Winkel α und β gilt dann: $\sin\alpha = \cos\left(90° - \alpha\right) = \cos\beta = \frac{\left|\vec{u} \circ \vec{n}\right|}{\left|\vec{u}\right| \cdot \left|\vec{n}\right|}$

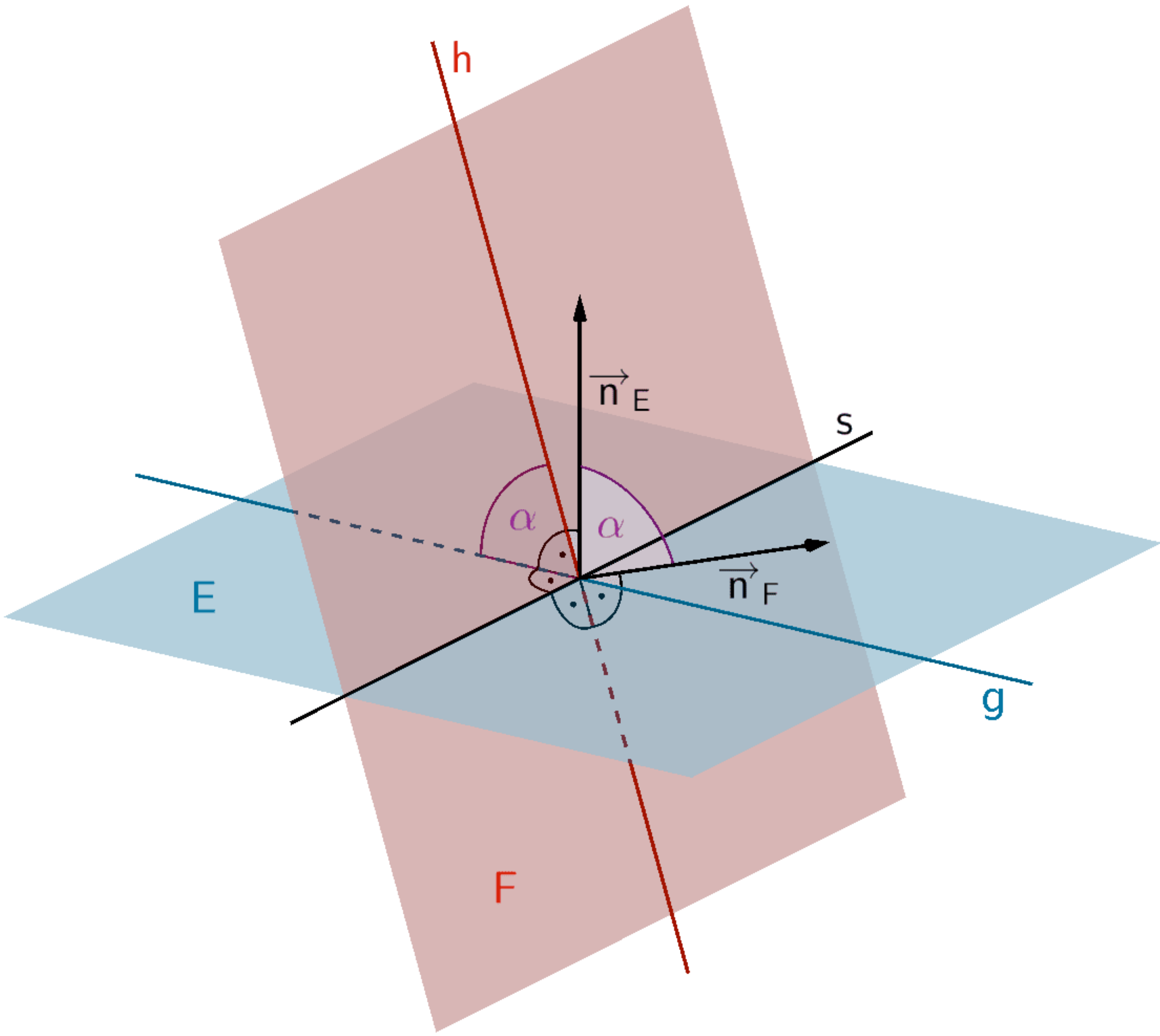
Beim Schnittwinkel zwischen einer Ebene und einer Geraden müssen wir uns über den Normalenvektor der Ebene an das Problem heranarbeiten. D.h. wir berechnen zunächst nicht den wirklichen Winkel zwischen Gerade und Ebene, sondern zwischen Gerade und einem Vektor, der senkrecht auf der Ebene steht.



Bestimmung des Schnittwinkels zweier Ebenen

Der Schnittwinkel zwischen zwei Ebenen $E_1 : \overrightarrow{n_1} \circ \left(\overrightarrow{X} - \overrightarrow{A}\right) = 0$ und $E_2 : \overrightarrow{n_2} \circ \left(\overrightarrow{X} - \overrightarrow{B}\right) = 0$ ist gleich dem spitzen Winkel α, den die Normalenvektoren $\overrightarrow{n_1}$ und $\overrightarrow{n_2}$ einschließen.

Für den Winkel α gilt dann: $\cos\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{n_1} \circ \overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n_2}\right|}$.



Hier vereinfacht sich das Vorgehen, weil der Winkel zwischen den beiden Ebenen dem entspricht, den die beiden Normalenvektoren einschließen. Somit müssen wir keine weiteren Überlegungen angeschlossen werden, als einfach den Winkel zwischen den beiden Normalenvektoren zu berechnen, was gut in der Darstellung gesehen werden kann.

Übung: Nach S.148/4a:

Berechnen Sie den Schnittwinkel den Ebenen $E_1 : \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \left[\overrightarrow{X} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0$ und $E_2 : \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \left[\overrightarrow{X} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \right] = 0$.

Es genügt folgender Ansatz: $\cos\alpha = \dfrac{\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right|} = \dfrac{30}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{37}} \approx 0,967 \Rightarrow \alpha \approx 14,71°$

Zum Berechnen des Werts von α bitte wieder am Taschenrechner $cos^{-1}(0,967)$ eintippen!

Hausaufgabe:
S.148/2a, 6a, 8ab