5.8. Abstandsbestimmungen

(0) Abstand Punkt – Ebene

Wir kennen schon im Zusammenhang mit der Hesse´schen Normalenform von Ebenen die Berechnung des Abstandes eines Punktes von einer Ebene:
Setze die Koordinaten des Punktes P in die linke Seite dieser Hesse´schen Normalenform ein und berechne den Wert.

Für den Abstand $d(P;E)$ eines Punktes $P\langle x_1|x_2|x_3\rangle$ von einer in Hesse´scher Normalenform gegebenen Ebene E gilt im Fall der

- Vektordarstellung: $E: \overrightarrow{n_0} \circ \left(\vec{X} - \vec{A}\right) = 0$ $\quad d = \left|\overrightarrow{n_0} \circ \left(\vec{P} - \vec{A}\right)\right|$
- Koordinatendarstellung: $E: \frac{n_1x_1+n_2x_2+n_3x_3+n_0}{\pm\sqrt{n_1^2+n_2^2+n_3^2}} = 0$ $\quad d = \left|\frac{n_1x_1+n_2x_2+n_3x_3+n_0}{\sqrt{n_1^2+n_2^2+n_3^2}}\right|$

Die Koordinatendarstellung ist dabei die Form, die weitaus gebräuchlicher ist. Der komplexe Term bedeutet dabei nur, dass die Normalenform der Ebenengleichung durch die Länge des Normalenvektors dividiert wird. Danach werden die Werte der einzelnen x-Komponenten eingesetzt.

Beispiel:

Berechnen Sie den Abstand des Punktes $P\langle 2|3|-2\rangle$ von der Ebene

$$E: -4x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 2 = 0$$

Ermittle zuerst die Hesse`sche Normalenform mit Hilfe der Länge des Normalenvektors *(Komponenten vor den x-Termen!):*

$$|\vec{n}| = \left|\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-4)^2 + 4^2 + 2^2} = 6$$

Damit ergibt sich die Hesse´sche Normalenform von E als Quotient der Normalenform und der Länge des Normalenvektors („Normieren des Normalenvektors"):

$$E: \frac{-4x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 2}{6} = 0$$

Das bedeutet nun direkt für die Abstandsbestimmung von P zu E:

$$d(P,E) = \left|\frac{-4x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 2}{6}\right|$$

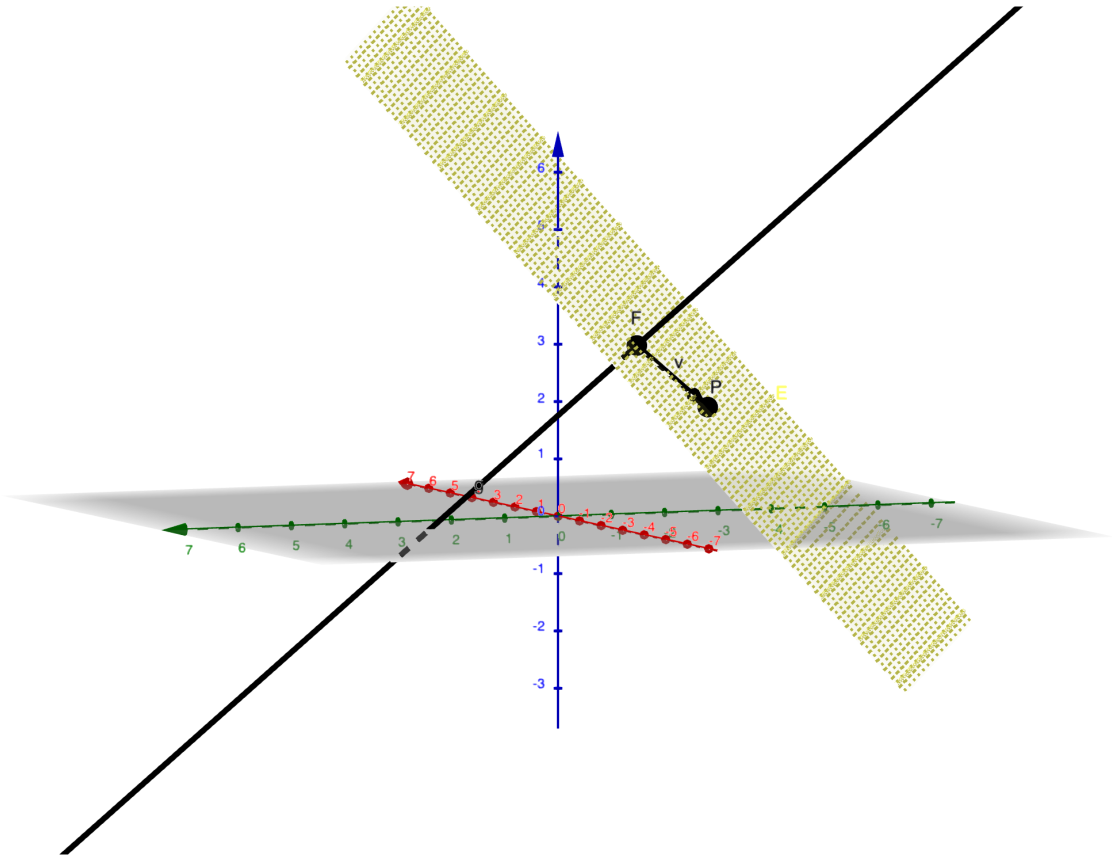
Konkret für unseren Punkt $P\langle 2|3|-2\rangle$:

$$d(P,E) = \left|\frac{-4\cdot 2 + 4\cdot 3 + 2\cdot(-2) - 2}{6}\right| = \left|\frac{-8 + 12 - 4 - 2}{6}\right| = \frac{1}{3}$$

Der Punkt $P\langle 2|3|-2\rangle$ liegt im Abstand von $\frac{1}{3}$ LE zur Ebene E.

(1) Abstand Punkt – Gerade

Um den Abstand d eines Punktes P von einer Geraden $g: \vec{X} = \vec{A} + \lambda \cdot \vec{u}$ zu berechnen, bedient man sich eines Tricks: Wir stellen eine Ebene E (als Hilfsebene) auf, die den Punkt P (sinnvollerweise als Aufpunkt) enthält und den Richtungsvektor $\vec{u}$ der Geraden g als Normalenvektor $\vec{n}$ hat. Damit verläuft die Gerade g senkrecht zu dieser Hilfsebene E (*im Bild grün*). Mit Hilfe des Schnittpunktes F von g und E (dem Lotfußpunkt) kann man dann über die Vektorlänge $\left|\overrightarrow{FP}\right|$ zur gewünschten Entfernung kommen.
Grafisch:



Also gilt folgende Arbeitsanweisung:

1. Aufstellen der Gleichung einer Ebene E, die P enthält und senkrecht zu g ist:
   Am besten über die Vektordarstellung der Ebene E mit dem Normalenvektor $\vec{u}$ und dem Aufpunkt P: $E: \vec{u} \circ \left(\vec{X} - \vec{P}\right) = 0$
2. Bestimmen des Schnittpunkts F der Ebene E mit der Geraden g (Lotfußpunkt F bestimmen):
   Einsetzen von g in die Normalenform der Ebenengleichung von E und Berechnung von λ, Einsetzen von λ in die Geradengleichung von g und Bestimmen der Koordinaten von F, also des Lotfußpunktes von g auf E.
3. Berechnen des Abstandes der Punkte P und F:
   Die Vektorlänge $\left|\overrightarrow{FP}\right|$ ist der Abstand des Punktes P von der Geraden g (Man könnte auch sagen des Lots von P auf g)

Beispiel:

Berechnen Sie den Abstand des Punktes $P\langle 1|-2|-1\rangle$ von der Geraden $g := \vec{X} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}$.

1. Hilfsebene E erstellen, die P enthält und $\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}$ als Richtungsvektor hat:

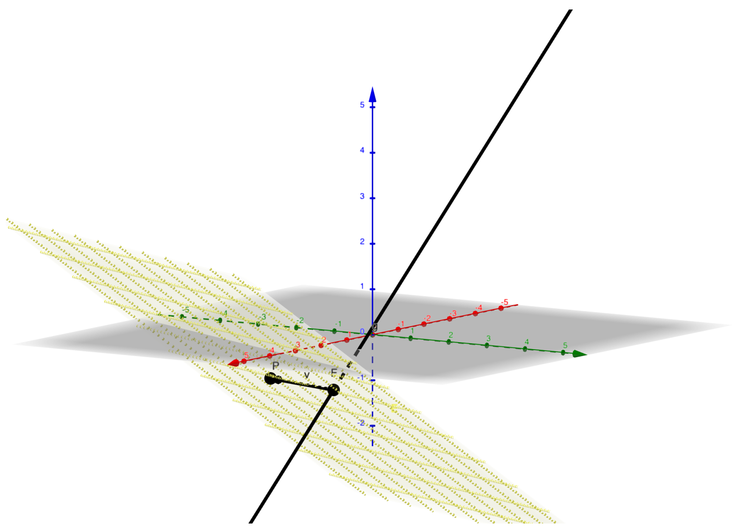
   Am einfachsten zunächst in Vektordarstellung: $E: \begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix} \circ \left[\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}\right] = 0$

   Daraus folgt einfach die Koordinatendarstellung:
   $E: -2x_1 + x_2 + 3x_3 + 7 = 0$ bzw.
   $E: 2x_1 - x_2 - 3x_3 - 7 = 0$, wenn man mit -1 durchmultipliziert, um ein Minuszeichen standardmäßig vor der Zahl ohne x zu erhalten.
2. Bestimmen des Lotfußpunktes F, indem g *(zeilenweise für die x-Terme)* in E eingesetzt wird:

   $$g\ in\ E: 2(2-2\lambda) - (1+\lambda) - 3(0+3\lambda) - 7 = 0$$
   $$4 - 4\lambda - 1 - \lambda - 9\lambda - 7 = 0 \Leftrightarrow -14\lambda - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{2}{7}$$

   Eingesetzt in g liefert das dann: $\vec{F} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + \left(-\frac{2}{7}\right) \cdot \begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\frac{4}{7}\\\frac{5}{7}\\-\frac{6}{7}\end{pmatrix}$, also ist der Lotfußpunkt $F\left\langle 2\frac{4}{7}\middle|\frac{5}{7}\middle|-\frac{6}{7}\right\rangle$.
3. Nun muss abschließend nur noch die Länge des Vektors $\left|\overrightarrow{FP}\right|$ bestimmt werden:

   $$\left|\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\frac{4}{7}\\\frac{5}{7}\\-\frac{6}{7}\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}-1\frac{4}{7}\\-2\frac{5}{7}\\-\frac{1}{7}\end{pmatrix}\right| = 3{,}14 \text{ LE}$$
4. Skizze:



(2) Abstand zweier paralleler Geraden

Wie unter (1), dabei kann der Abstand eines beliebigen Punktes der Geraden h (z.B. der Aufpunkt) von der Geraden g untersucht werden.

Hierbei nimmt man einfach den Aufpunkt der Gerade h als den Punkt P, dessen Abstand zur Gerade g bestimmt werden muss. Also genauso auch wieder eine Hilfsebene E aufstellen, die den Aufpunkt von h enthält und den Richtungsvektor von g als Normalenvektor.

Analoges Vorgehen wie oben.

(3) Abstand zweier windschiefer Geraden

Um den Abstand zweier windschiefer Geraden $g:\vec{X}=\vec{A}+\lambda\cdot\vec{u}$ und $h:\vec{X}=\vec{B}+\mu\cdot\vec{v}$ zu ermitteln, muss man wieder einen Lösungsweg gehen, der eine Hilfsebene E als Zwischenstation enthält.

Diese Hilfsebene E enthält nun aber die Gerade g vollständig und als zweiten Richtungsvektor dazu addiert den Richtungsvektor von h. Hier beginnt man zunächst mit der Parameterform dieser Ebene E, die nichts anderes ist als die Summe der Geraden g und des Richtungsvektors von h mit seinem Parameter μ:

$$E{:}\,\vec{X}=\vec{A}+\lambda\cdot\vec{u}+\mu\cdot\vec{v}$$

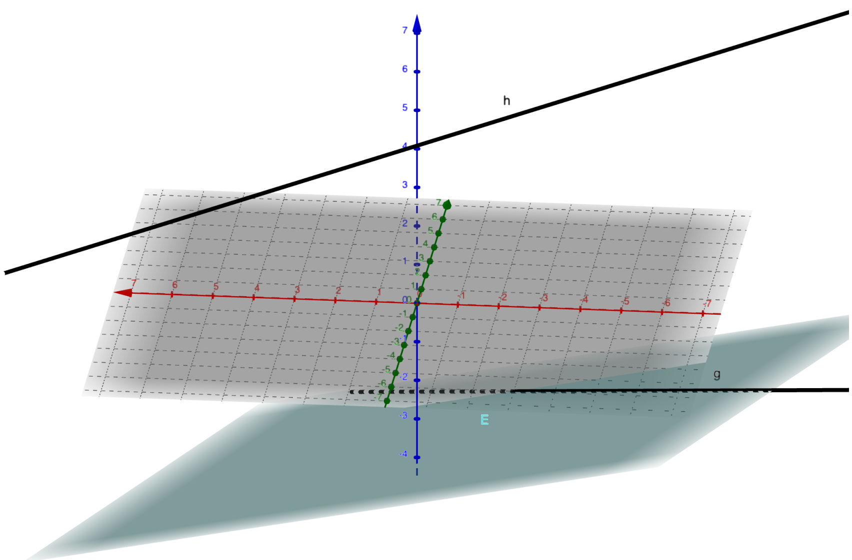
Daraus ermittelt man in gewohnter Weise die Normalenform der Ebene E mit Hilfe des Vektorprodukts (Kreuzprodukts) der beiden Richtungsvektoren.
Damit ergibt sich für den Normalenvektor $\vec{n}$ der Hilfsebene E:

$$\vec{n}=(\vec{u}\times\vec{v}).$$

Diese Hilfsebene E, die g enthält und zu h parallel ist, hat als Normalenform:

$E:\left(\vec{u}\times\vec{v}\right)\circ\left(\vec{X}-\vec{A}\right)=0$:

Bilde also zunächst das Vektorprodukt der beiden Richtungsvektoren und benutze den Aufpunkt von g als Aufpunkt der Ebene E.



Der Abstand der windschiefen Geraden g und h ist gleich dem Abstand des Aufpunktes B der Geraden h von der Ebene E. Es gilt:

$$d=\left|\frac{\left(\vec{u}\times\vec{v}\right)\circ\left(\vec{B}-\vec{A}\right)}{\left|\vec{u}\times\vec{v}\right|}\right|.$$

Kurz: Bilde die HNF der Hilfsebene E und setze den Aufpunkt B von h in die Abstandsformel der HNF ein.

Beispiel: (Nach Aufgabe S.144/13a)

Gegeben sind die Punkte A (-9 | 3 | -3), B (-3 | -6 | 0), C (-7 | 5 | 5) und D (4 | 8 | 0).
Berechnen Sie den Abstand der Geraden AB und CD

Lösung: Die Geraden $g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $h: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ sind windschief

(wird hier nicht gezeigt!).
Für die Hilfsebene E, die g enthält und zu h parallel ist, muss man zunächst den Normalenvektor $\vec{n}$ mit Hilfe des Vektorprodukts der beiden Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ ermitteln:

$\begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 \\ 63 \\ 117 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 13 \end{pmatrix}$.A=(

Als Aufpunkt wählt man den Aufpunkt A der Geraden g und bildet die Vektordarstellung der Ebene:

$E: \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 13 \end{pmatrix} \circ \left[\overrightarrow{X} - \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \right] = 0$ und damit die Koordinatendarstellung: $E: 4x_1 + 7x_2 + 13x_3 + 54 = 0$

.

Die HNF ergibt sich leicht zu $E: \frac{-4x_1 - 7x_2 - 13x_3 - 54}{3\sqrt{26}} = 0.$

Der letzte Schritt ist es nun, die Koordinaten des Aufpunktes B von h in die Abstandsformel der HNF von E einzusetzen: $d(B,E) = \left| \frac{-4 \cdot (-7) - 7 \cdot 5 - 13 \cdot 5 - 54}{3\sqrt{26}} \right| = \left| \frac{-126}{3\sqrt{26}} \right| \approx 8{,}24LE$

(4) Abstand zweier paralleler Ebenene E und F

Hier muss man nur den Abstand eines beliebigen Punktes der Ebene F von der Ebene E bestimmen. In die Hesse´sche Normalenform von E setzt man z.B. den Aufpunkt von F ein. Sind beide Ebenen in Normalenform gegeben, muss zunächst ein Punkt P von F bestimmt werden, der in dieser Ebene liegt (d.h. seine Koordinaten werden für die x-Terme eingesetzt und ergeben eine wahre Aussage).

(5) Abstand Ebene E von einer zu E parallelen Gerade g
Wie unter (4):
Auch hier muss man nur den Abstand eines beliebigen Punktes der Geraden g von der Ebene E bestimmen. In die Hesse´sche Normalenform von E setzt man z.B. den Aufpunkt der Geraden g ein, die in der Regel in Parameterform gegeben ist.

(6) Abstand zweier Punkte $P\langle p_1|p_2|p_3\rangle$ und $Q\langle q_1|q_2|q_3\rangle$
Hier gilt es den Vektor $\overrightarrow{PQ}$ zu bilden und dessen Länge

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 + (q_3 - p_3)^2}$$

zu bestimmen (s. Q11).

Hausaufgabe (Bitte wieder bis zum kommenden Montag, den 30. März 2020):

S. 143/ 2a (Abstand Punkt – Ebene), S.143/5 (Abstand Ebene – parallele Gerade), S. 143/8 (Abstand Punkt – Gerade), S.144/13 (Abstand windschiefer Geraden, Abstand Punkt – Ebene, Volumen der Pyramide)

Das ist nicht wenig, aber erarbeitet Euch bitte mit Hilfe der Erklärungen auf diesem Reader die Aufgaben schrittweise.

Fragen können natürlich wieder jederzeit über unseren Kanal in der schul.cloud gestellt werden.

Viel Erfolg, bleibt gesund und alles Gute!