

5.8 Abstandsbestimmungen

Lösung HA S. 144/13

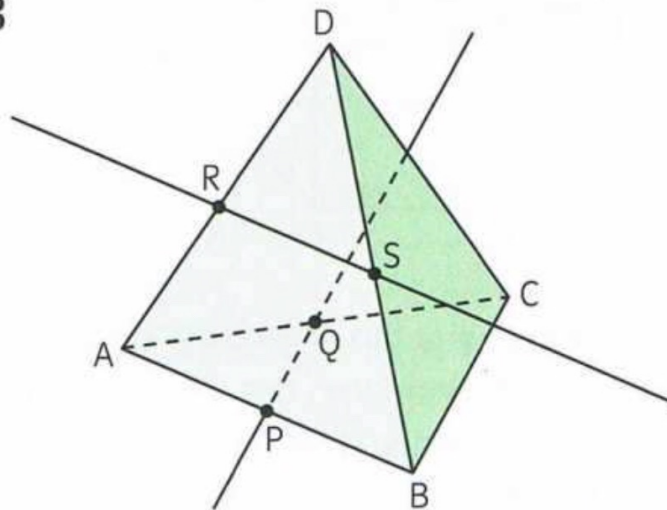
Abstand windschiefer Geraden

Abstand Punkt - Ebene

Wiederholung: Mittelpunkt einer Strecke

Volumen einer (dreiseitigen)
Pyramide

13



Gegeben ist eine Pyramide mit den Ecken $A(-9|3|-3)$, $B(-3|-6|0)$, $C(-7|5|5)$ und $D(4|8|0)$. P, Q, R und S sind Kantenmitten der Pyramide. Berechnen Sie

- den Abstand der Geraden AB und CD,
- den Abstand des Punktes A zur Ebene durch B, C und D,
- den Abstand der Geraden PQ und RS.
- Berechnen Sie das Volumen der Pyramide.

a) Geraden g_{AB} : $\vec{X} = \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix}$

g_{CD} : $\vec{X} = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$

Wegen $r \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ können die Geraden
 nur windschief sein oder einen Schnittpunkt haben
 (hier allerdings aufgrund der Skizze klar:
windschief).

Aufstellen der Hilfebene E aus der faden g_{AB} und

dem Richtungsvektor von g_{CD} :
 $E: \vec{X} = \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$
 (Note: $\begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ is labeled g_{AB} and $\begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ is labeled "Richtungsvektor von g_{CD} ".)

Berechnen der Normalenform von E

$$\begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 - 9 \\ 33 - (-30) \\ 18 - (-33) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 \\ 63 \\ 47 \end{pmatrix}$$

$$E \text{ gilt } \begin{pmatrix} 36 \\ 63 \\ 47 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 21 \\ 13 \end{pmatrix}$$

d.h. der Vektor $\begin{pmatrix} 12 \\ 21 \\ 13 \end{pmatrix}$ ist ein "verkürzter" Normalenvektor auf E :

$$E: \begin{pmatrix} 12 \\ 21 \\ 13 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \right] = 0$$

$$E: 4x_1 + 7x_2 + 13x_3 + 54 = 0 \Rightarrow \text{daraus die HNF:}$$

$$\text{aber } |\vec{n}_E| = \sqrt{4^2 + 7^2 + 13^2} = \sqrt{16 + 49 + 169} = \sqrt{234} = \sqrt{3 \cdot 26} \approx 15,30$$

$$\text{HNF von } E: \frac{-4x_1 - 7x_2 - 13x_3 - 54}{3\sqrt{26}} = 0$$

$$d(CD; AB) = \left| \frac{-4 \cdot (-7) - 7 \cdot 5 - 13 \cdot 5 - 54}{3\sqrt{26}} \right| = \left| \frac{-126}{3\sqrt{26}} \right| \approx \underline{\underline{8,24 \text{ LE}}}$$

(Note: $-7, 5, 5$ are circled and labeled "Koordinaten von" with arrows pointing to them.)

b) Ebene durch B, C, D:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 11 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Normalenform ermitteln: $\begin{pmatrix} -4 \\ 11 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 70 \\ 35 - 0 \\ -56 - 77 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -70 \\ 35 \\ -133 \end{pmatrix}$

(Note: In the original image, the vectors are crossed out and replaced with $\begin{pmatrix} -4 \\ 11 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \end{pmatrix}$ for the calculation.)

$$= 7 \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ -19 \end{pmatrix} \leftarrow \text{verkürzen des Normalenvektors (der Einfachheit halber)}$$

$$\Rightarrow E: \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ -19 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0$$

$$E: -10x_1 + 5x_2 - 19x_3 = 0$$

$$|\vec{n}_E| = \left| \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ -19 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-10)^2 + 5^2 + (-19)^2} = \sqrt{486} \\ = 9\sqrt{6} \\ \approx 22,05 \text{ LE}$$

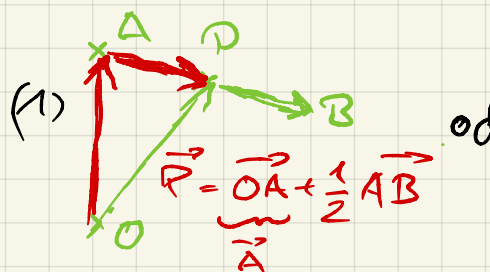
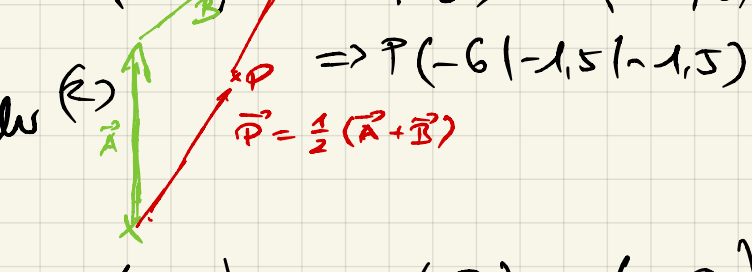
Damit ergibt sich für die HNF:

$$E: \frac{-10x_1 + 5x_2 - 19x_3}{9\sqrt{6}} = 0$$

$$d(A; E) = \left| \frac{-10 \cdot (-3) + 5 \cdot 3 - 19 \cdot (-3)}{9\sqrt{6}} \right| = \left| \frac{162}{9\sqrt{6}} \right| = \frac{18}{\sqrt{6}} \\ = 3\sqrt{6} \approx 7,35 \text{ LE}$$

c) Die Koordinaten der Kantenmitten müssen zunächst bestimmt werden:

$$\vec{OP} = \vec{OA} + \frac{1}{2} \vec{AB} = \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -1,5 \\ -1,5 \end{pmatrix}$$

(1)  $\vec{P} = \vec{OA} + \frac{1}{2} \vec{AB}$ oder (2)  $\vec{P} = \frac{1}{2} (\vec{A} + \vec{B}) \Rightarrow P(-6 | -1,5 | -1,5)$

$$\vec{OQ} = \vec{OA} + \frac{1}{2} \vec{AC} = \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Q(-8 | 4 | 1)$$

• Die beiden anderen Punkte als Seitenmitten mit dem anderen Weg (2)

$$\vec{R} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{A} + \vec{D}) = \frac{1}{2} \cdot \left[\begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 11 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2,5 \\ 5,5 \\ -1,5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow R(-2,5 | 5,5 | -1,5)$$

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{B} + \vec{D}) = \frac{1}{2} \cdot \left[\begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow S(0,5 | 1 | 0)$$

• Nun stellen wir die Seiten gegenüber PQ und RS auf:

$$PQ: \vec{X} = \begin{pmatrix} -6 \\ -1,5 \\ -1,5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 5,5 \\ 2,5 \end{pmatrix}$$

$$RS: \vec{X} = \begin{pmatrix} -2,5 \\ 5,5 \\ -1,5 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4,5 \\ 1,5 \end{pmatrix}$$

$$PQ: \vec{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ -1,5 \\ -1,5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 5,5 \\ 2,5 \end{pmatrix}$$

$$RS: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2,5 \\ 5,5 \\ -1,5 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4,5 \\ 1,5 \end{pmatrix}$$

Da aufgrund der Lage in der Pyramide die Geraden RS und PQ windschief sein müssten, entfällt hier der Nachweis dafür.

- Hilfsebene E , die von der Geraden PQ und dem Richtungsvektor von RS gebildet wird
(die Gerade RS verläuft dann ja parallel zu E !)

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ -1,5 \\ -1,5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 5,5 \\ 2,5 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4,5 \\ 1,5 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Erstellen der Normalenform von E als nächsten Schritt:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5,5 \\ 2,5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -4,5 \\ 1,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8,25 - (-11,25) \\ 2,5 - (-2) \\ 3 - 16,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19,5 \\ 4,5 \\ -13,5 \end{pmatrix}$$

$$= 1,5 \cdot \begin{pmatrix} 13 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix}$$

nicht unbedingt notwendig,
aber vereinfacht die Rechnung!

$$\Rightarrow E: \begin{pmatrix} 13 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 \\ -1,5 \\ -1,5 \end{pmatrix} \right] = 0$$

$$\Rightarrow E: 13x_1 + 3x_2 - 9x_3 + 96 = 0 \quad | \cdot (-1)$$

$$\text{bzw. } E: -13x_1 - 3x_2 + 9x_3 - 96 = 0$$

$$E: -13x_1 - 7x_2 - 5x_3 - 96 = 0$$

$$\text{Mit } |\vec{n}_E| = \left| \begin{pmatrix} -13 \\ -7 \\ -5 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-13)^2 + (-7)^2 + (-5)^2} = \sqrt{243} \approx 15,59$$

ergibt sich die HNF zu:

$$E: \frac{-13x_1 - 7x_2 - 5x_3 - 96}{\sqrt{243}} = 0$$

$$d(R; E) = \left| \frac{-13 \cdot (-25) - 7 \cdot 5,5 - 5 \cdot (-1,5) - 96}{\sqrt{243}} \right| = \left| \frac{-94,5}{\sqrt{243}} \right| \approx 6,06 \text{ LE}$$

Die windschiefen Geraden PQ und RS verlaufen im Abstand 6,06 LE zueinander.

d) Volumen der Pyramide

$$V = \frac{1}{6} \cdot |(\vec{AB} \times \vec{AC}) \circ \vec{AD}|$$

Formel aus

Q11!

Dreieckige Pyramide!

$$= \frac{1}{6} \cdot \left| \left[\begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} \right] \circ \begin{pmatrix} 13 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \left| \begin{pmatrix} -72 & 6 \\ 6 & -48 \\ 12 & -(-18) \end{pmatrix} \right] \circ \begin{pmatrix} 13 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \left| \begin{pmatrix} -78 \\ -42 \\ 30 \end{pmatrix} \right] \circ \begin{pmatrix} 13 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \frac{1}{6} \cdot |(-78 \cdot 13 + (-42) \cdot 5 + 30 \cdot 3)|$$

$$= \frac{1}{6} \cdot |-1134| = \underline{\underline{189 \text{ VE}}}$$

