5. 8. Abstandsberechnungen

Übungsaufgaben

Lösungen:

S. 143 / 2a, 5, 8

2

Berechnen Sie die Abstände der Punkte A(2|0|2), B(2|1|−8) und C(5|5|5) von

a) E: $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \right] = 0$;

b) E: $2x_1 - 10x_2 + 11x_3 - 30 = 0$.

a) $E: \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \right] = 0$

$\Rightarrow 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 1 = 0 \quad | \cdot (-1)$ wegen

$E: -2x_1 + x_2 - 2x_3 - 1 = 0$

$|\vec{n}| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-2)^2} = 3$

Hesse'sche Normalenform von E:

$E: \dfrac{-2x_1 + x_2 - 2x_3 - 1}{3} = 0$

Abstandsberechnungen:

A(2|0|2) von E:

$d(A; E) = \left| \dfrac{-2 \cdot 2 + 0 - 2 \cdot 2 - 1}{3} \right| = \left| \dfrac{-9}{3} \right| = \underline{\underline{3}}\ LE$

$d(B; E) = \left| \dfrac{-2 \cdot 2 + 1 - 2 \cdot (-8) - 1}{3} \right| = \left| \dfrac{12}{3} \right| = \underline{\underline{4}}\ LE$

$$E: \frac{-2x_1+x_2-2x_3-1}{3} = 0$$

$$d(C;E) = \left|\frac{-2\cdot 5+5-2\cdot 5-1}{3}\right| = \left|-\frac{16}{3}\right| = \underline{5\tfrac{1}{3}\ LE}$$

5

Gegeben sind die Ebene E: $x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0$ und die Punkte A(0|2|0) und B(5|−1|−2). Zeigen Sie, dass die Gerade AB parallel zu E ist und berechnen Sie ihren Abstand von E.

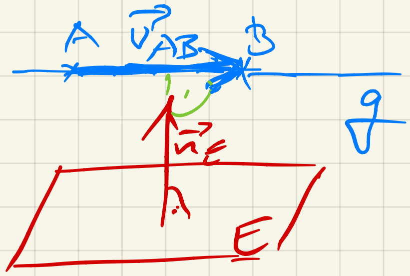
Zunächst stellen wir die Parameterform von AB (als Gerade) auf:

$$g_{AB}: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}5-0\\-1-2\\-2-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} + \lambda\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}5\\-3\\-2\end{pmatrix}}_{\vec{v}_{AB}}$$

Mit Hilfe von $\vec{n}_E = \begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}$ erfolgt der Nachweis $\vec{n}_E \perp \vec{v}_{AB}$

$$\underbrace{\vec{n}_E \circ \vec{v}_{AB}}_{} = \begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}5\\-3\\-2\end{pmatrix} = 5-9+4 = 0$$

Normalenvektor der Ebene E und Richtungsvektor der Geraden g_{AB} müssen senkrecht zueinander sein, wenn g_{AB} parallel zu E verläuft.



Wenn nun die beiden Vektoren senkrecht zueinander stehen, könnte g_{AB} auch vollständig in E liegen.

In diesem Fall würde der Wert für einen Punkt von g_{AB} Null sein. Also brauchen wir nicht eigens g_{AB} in E einsetzen, sondern bestimmen gleich die HNF von E:

$$|\vec{n}_E| = \sqrt{1^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{14}$$

HNF von E: $\dfrac{x_1 + 3x_2 - 2x_3}{\sqrt{14}} = 0$

Die Abstandsbestimmung mit dem Aufpunkt A von g_{AB} liefert dann die Lösung:

$$d(A;E) = \left| \frac{3 \cdot 2}{\sqrt{14}} \right| = \frac{6}{\sqrt{14}} = \frac{3}{7} \cdot \sqrt{14}\ LE$$

$$\approx 1{,}60\ LE$$

Da dieser Abstand $\neq 0$, muss g_{AB} parallel zu E verlaufen.

Ein Einsetzen von g_{AB} in E liefert übrigens:

$$5\lambda + 3 \cdot (2 - 3\lambda) - 2 \cdot (-2\lambda) = 0$$

$$5\lambda + 6 - 9\lambda + 4\lambda = 0$$

$$6 = 0 \quad ↯$$

$\Rightarrow$ g_{AB} und E haben also keine gemeinsamen Punkte und verlaufen damit parallel.

Nur zur Kontrolle!

8

Berechnen Sie jeweils den Abstand des Punktes $P(6|7|-3)$ von den Geraden

$$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ und } g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

.

(a) Abstand P zu g_1

Stelle zunächst die Normalenform der Ebene E auf, die P enthält und den Richtungsvektor von g_1 als Normalenvektor hat.

$$E: \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix} \right] = 0 \Leftrightarrow 3x_1 - 2x_3 - 24 = 0$$

Ermittle nun die Koordinaten des Lotfußpunktes F ($\hat{=}$ Schnittpunkt von g_1 und E), indem wieder zeilenweise g_1 in E eingesetzt wird:

$$3 \cdot (2 + 3\lambda) - 2(4 - 2\lambda) - 24 = 0$$

$$6 + 9\lambda - 8 + 4\lambda - 24 = 0$$

$$13\lambda - 2 - 24 = 0$$

$$13\lambda = 26$$

$$\lambda = 2$$

$\Rightarrow \lambda = 2$ eingesetzt in g_1 liefert:

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underbrace{F(8|1|0)}_{\text{Lotfußpunkt } F}$$

Der Abstand von P zu g_1 ergibt sich schließlich aus der Vektorlänge von $\vec{FP}$:

$$|\vec{FP}| = \left| \begin{pmatrix} 6-8 \\ 7-1 \\ -3-0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \sqrt{(-2)^2 + 6^2 + (-3)^2} = \sqrt{49} = 7$$

$\Rightarrow$ P liegt im Abstand von 7 LE von g_1 entfernt.

Analog erfolgt die Berechnung von $d(T; g_2)$:

b) $E \perp g_2$ durch P: $E: \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \left[\vec{X} - \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix} \right] = 0$ Hilfsebene E

$E \cap g = \{F\}$; $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \left[\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix} \right] = 0$; $\quad -3 + 9\mu - 6 + 4\mu + 8 + 4\mu = 0 \Rightarrow \mu = \frac{1}{17}$;

$F\left(5\tfrac{3}{17} \middle| 4\tfrac{2}{17} \middle| 1\tfrac{2}{17}\right)$

$$d(P,g) = |\vec{PF}| = \left| \begin{pmatrix} 5\frac{3}{17} \\ 4\frac{2}{17} \\ 1\frac{2}{17} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -\frac{14}{17} \\ -2\frac{15}{17} \\ 4\frac{2}{17} \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{17} \cdot \sqrt{7497} \approx 5{,}09$$