5.7. Gegenseitige Lage von Ebenen

Um die gegenseitige Lage der in Normalenform gegebenen Ebenen $E: \vec{n} \circ \left(\vec{X} - \vec{A}\right) = 0$ und $F: \vec{m} \circ \left(\vec{X} - \vec{B}\right) = 0$ zu untersuchen, kann man folgendermaßen vorgehen:

<table>
<tr><td colspan="3">Sind die Normalenvektoren $\vec{n}$ und $\vec{m}$ linear abhängig?</td></tr>
<tr><td colspan="2">ja</td><td>nein</td></tr>
<tr><td colspan="2">$E \parallel F$</td><td rowspan="4">E und F schneiden sich in einer Geraden. Die gemeinsamen Punkte erhält man durch Lösen des Gleichungssystems aus den Koordinatendarstellungen.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Haben E und F gemeinsame Punkte?</td></tr>
<tr><td>ja</td><td>nein</td></tr>
<tr><td>E = F</td><td>$E \parallel F$ und $E \neq F$</td></tr>
</table>

Sind die Normalenvektoren der beiden Ebenen linear abhängig (der eine ist das Vielfache des anderen), so kann man mit der Punktprobe (Ein beliebiger Punkt aus der einen Ebene wird in die andere eingesetzt!) entscheiden, ob die Ebenen parallel sind oder zusammenfallen.

Beispiele:

(a) Gegeben sind die beiden Ebenen $E: x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 6 = 0$ und $F: x_1 + 2x_2 + x_3 - 4 = 0$.

(1) Die Normalenvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind offensichtlich nicht linear abhängig.

(2) Nun gilt es das Gleichungssystem zu lösen:

$$\begin{array}{ll} \text{(I)}\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 6 = 0 & \text{(I)}\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 6 = 0 \\ \text{(II)}\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 4 = 0 & \text{(II)}\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 4 = 0 \quad \text{II} - \text{I} \quad \text{(III)}\ 4x_2 - 2x_3 + 2 = 0 \end{array}$$

Da dieses Gleichungssystem unterbestimmt ist (zwei Gleichungen mit drei Unbekannten), ist nun eine der beiden Variablen in (III) durch λ zu ersetzen. Wir wählen $\lambda = x_3$ und lösen dann nach x_2 auf, was zu

$\text{(III)}\ 4x_2 - 2\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow x_2 = \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2}$ führt. Damit haben wir $x_2\ und\ x_3$ in Abhängigkeit von λ bestimmt.

Nun gilt es noch eine Gleichung aus (I) und (II) zu ermitteln, die nur x_1 und x_3 enthält, um auch noch einen Wert für x_1 in Abhängigkeit von λ zu erhalten.

$$\begin{array}{l} \text{(I)}\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 6 = 0 \\ \text{(II)}\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 4 = 0 \quad \text{II} + \text{I} \quad \text{(III)}\ 2x_1 + 4x_3 - 10 = 0 \end{array}$$

. Mit $\lambda = x_3$ folgt nun:

$\text{(III)}\ 2x_1 + 4\lambda - 10 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2\lambda + 5$.

(3) Der Lösungsvektor ist damit: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\lambda + 5 \\ 0,5\lambda - 0,5 \\ \lambda \end{pmatrix}$

Wenn wir den rechten Vektor nun in den λ-Teil (Richtungsvektor-Teil) und einen Koordinatenteil zerlegen, erhalten wir die Schnittgerade g:

$$g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ -0,5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 0,5 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Wenn nun aber die Ebenen nicht beide in Normalenform, sondern Ebene E in Normalenform und Ebene F in Parameterform gegeben ist, dann ist es geschickter, die Ebene F in Parameterform für den x-Vektor in die Normalenform der Ebene E einzusetzen. Dabei kann man dann zum Schluss den einen Parameter durch den anderen ersetzen:

(b) Gegeben sind die Ebenen

$E: 5x_1 - x_2 - x_3 - 15 = 0$ und $F: \vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(Es soll hier nicht gezeigt werden, dass die Normalenvektoren linear abhängig sind.)

Bestimmen Sie die Schnittgerade s der beiden Ebenen E und F.

Wir ermitteln in diesem Fall nicht die Normalenform von F, sondern setzen die einzelnen Zeilen der Parameterform von F als Werte für $x_1, x_2\ und\ x_3$ in die Normalenform von E ein:

$$F\ in\ E: 5\underbrace{(2 + 1\lambda + 2\mu)}_{x_1} - \underbrace{(-1 + 2\lambda + 3\mu)}_{x_2} - \underbrace{(2 + 5\lambda + 1\mu)}_{x_3} - 15 = 0$$

Und weiter: $10 + 5\lambda + 10\mu + 1 - 2\lambda - 3\mu - 2 - 5\lambda - \mu - 15 = 0$,
schließlich: $-6 - 2\lambda + 6\mu = 0$.
Sinnvollerweise sollte nun nach λ aufgelöst werden: $\lambda = -3 + 3\mu$. Diesen Wert für λ setzt man am Ende in die Parameterform von F ein, um eine Geradengleichung zu erhalten:

$$s: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + (-3 + 3\mu) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dies ergibt nach dem Auflösen der Klammer:

$$s: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ -15 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 15 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Und nach dem Zusammenfassen der entsprechenden Vektoren:

$$s: \vec{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ -13 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

(c) Bestimmen der Spurgeraden (= Schnittgeraden mit den Koordinatenebenen):

Gegeben ist die Ebene $E: 5x_1 - x_2 - x_3 - 15 = 0$. Bestimmen Sie die Gleichungen der Schnittgeraden von E mit den Koordinatenebenen.

Am einfachsten ist es, zunächst die Schnittpunkte der Ebene E mit den einzelnen Koordinatenachsen zu bestimmen und dann mit Hilfe dieser die Spurgeraden:

Schnittpunkt mit der $x_1 - Achse$, d.h. $x_2 = x_3 = 0$:
In E: $5x_1 - 0 - 0 - 15 = 0 \Leftrightarrow 5x_1 = 15 \Leftrightarrow x_1 = 3$, damit ist der erste Spurpunkt $S_1\langle 3|0|0\rangle$.
Analog:
Schnittpunkt mit der $x_2 - Achse$, d.h. $x_1 = x_3 = 0$:

$$-x_2 - 15 = 0 \Leftrightarrow x_2 = -15$$

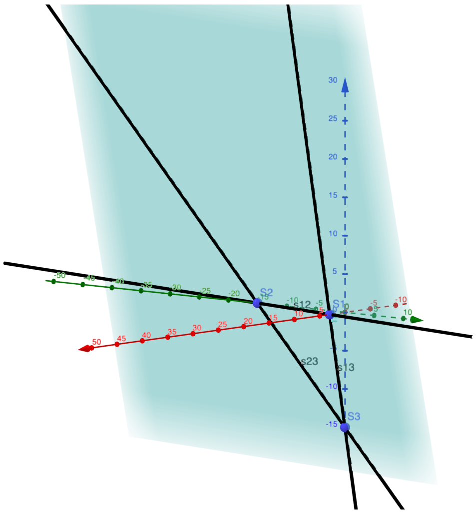
Und damit: $S_2\langle 0|-15|0\rangle$

Schnittpunkt mit der $x_3 - Achse$, d.h. $x_1 = x_2 = 0$:

$$-x_3 - 15 = 0 \Leftrightarrow x_3 = -15$$

Und damit: $S_3\langle 0|0|-15\rangle$

Die Spurgeraden ergeben sich damit einfach über die Parameterform der entsprechenden Geraden:



$$s_{12}: \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0-3 \\ -15-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -15 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$s_{23}: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ -15 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0-0 \\ 0-(-15) \\ -15-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -15 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ -15 \end{pmatrix}$$

$$s_{13}: \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0-3 \\ 0-0 \\ -15-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -15 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie nun als Übung aus dem Buch:
S. 138/2a S.138/3 S.139/4ab