Geometrie

Lage von Ebenen

Aufgaben

2

Bestimmen Sie alle gemeinsamen Punkte.

a) $E: x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 6 = 0$

$F: x_1 + 2x_2 + x_3 - 4 = 0$

(1) Bestimme Normalenvektoren der Ebenen

$$E: \quad \vec{n}_E = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad F: \quad \vec{n}_F = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ nicht linear abhängig, weil

$$r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ für ein } r \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ Es gibt also eine Schnittgerade

(2) Erstellen eines linearen Gleichungssystems:

$$\text{(I)} \quad x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 6 = 0$$
$$\text{(II)} \quad x_1 + 2x_2 + x_3 - 4 = 0$$

$$\text{I} - \text{II}: \quad -4x_2 + 2x_3 - 2 = 0$$

Wähle $\lambda = x_2$: $\quad -4\lambda + 2x_3 - 2 = 0$

$$2x_3 = 4\lambda + 2$$
$$x_3 = 2\lambda + 1$$

Jetzt müssen wir aus den Ebenengleichungen eine neue herstellen, die x_1 und x_2 enthält, um x_1 in Abhängigkeit von λ $(= x_2)$ ausdrücken zu können:

(I) $x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 6 = 0$

(II) $x_1 + 2x_2 + x_3 - 4 = 0$

$\Rightarrow$ I $- 3 \cdot$ II : $-2x_1 - 8x_2 + 6 = 0$

$\lambda = x_2$: $-2x_1 - 8\lambda + 6 = 0$

$$-2x_1 = 8\lambda - 6$$

$$x_1 = -4\lambda + 3$$

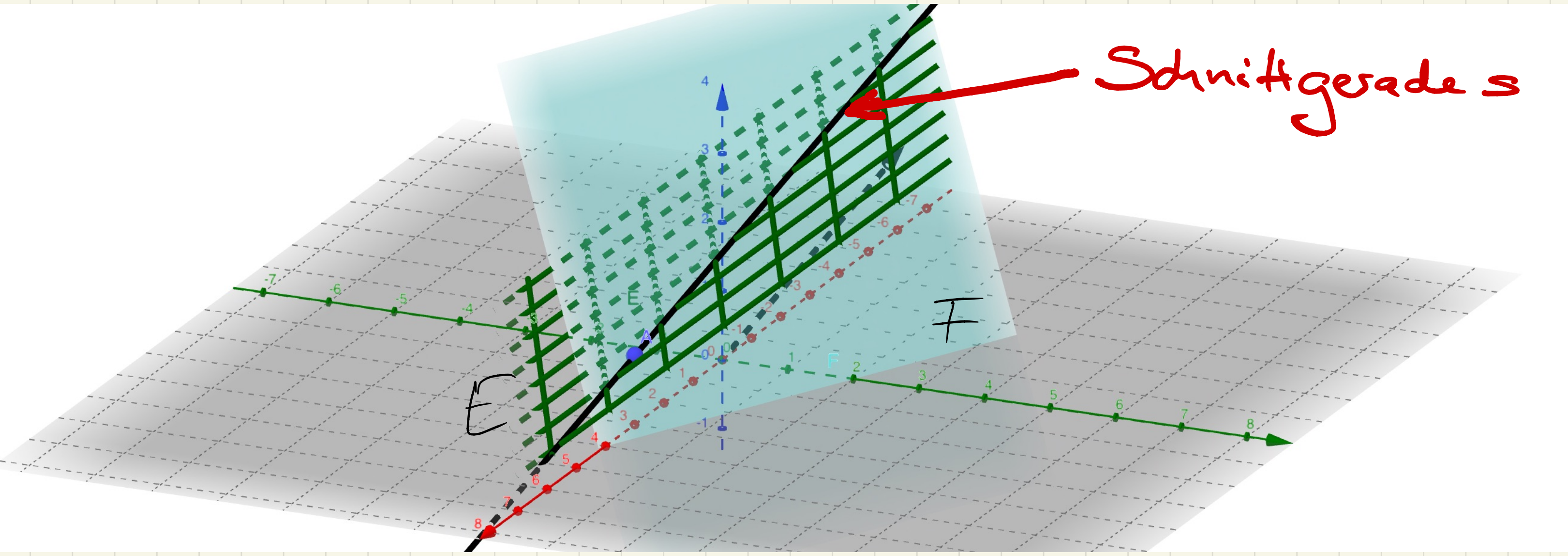
(3) Erstellen der Geradengleichung aus dem Lösungsvektor $\vec{x}$

$$s: \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4\lambda + 3 \\ \lambda \\ 2\lambda + 1 \end{pmatrix}$$

$$s: \vec{x} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bzw: Schnittgerade s

$$s: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$



3

Bestimmen Sie die Gleichungen der Schnittgeraden von E mit den Koordinatenebenen.

a) E: $4x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 15 = 0$

b) E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

a) Bestimmen der Spurpunkte ($\hat{=}$ Schnittpunkte der Ebene E mit den jeweiligen Koordinatenachsen)

$E: 4x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 15 = 0$

S_{x_1} ($\hat{=}$ $x_2 = x_3 = 0$) : $4x_1 + 15 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -\frac{15}{4}$

$\Rightarrow S_{x_1}(-3\tfrac{3}{4} | 0 | 0)$

S_{x_2} ($\hat{=}$ $x_1 = x_3 = 0$) $-3x_2 + 15 = 0 \Leftrightarrow x_2 = 5$

$\Rightarrow S_{x_2}(0 | 5 | 0)$

S_{x_3} $(x_1 = x_2 = 0)$: $-2x_3 + 15 = 0 \Leftrightarrow x_3 = \frac{15}{2}$

$\Rightarrow S_{x_3}(0|0|7\tfrac{1}{2})$

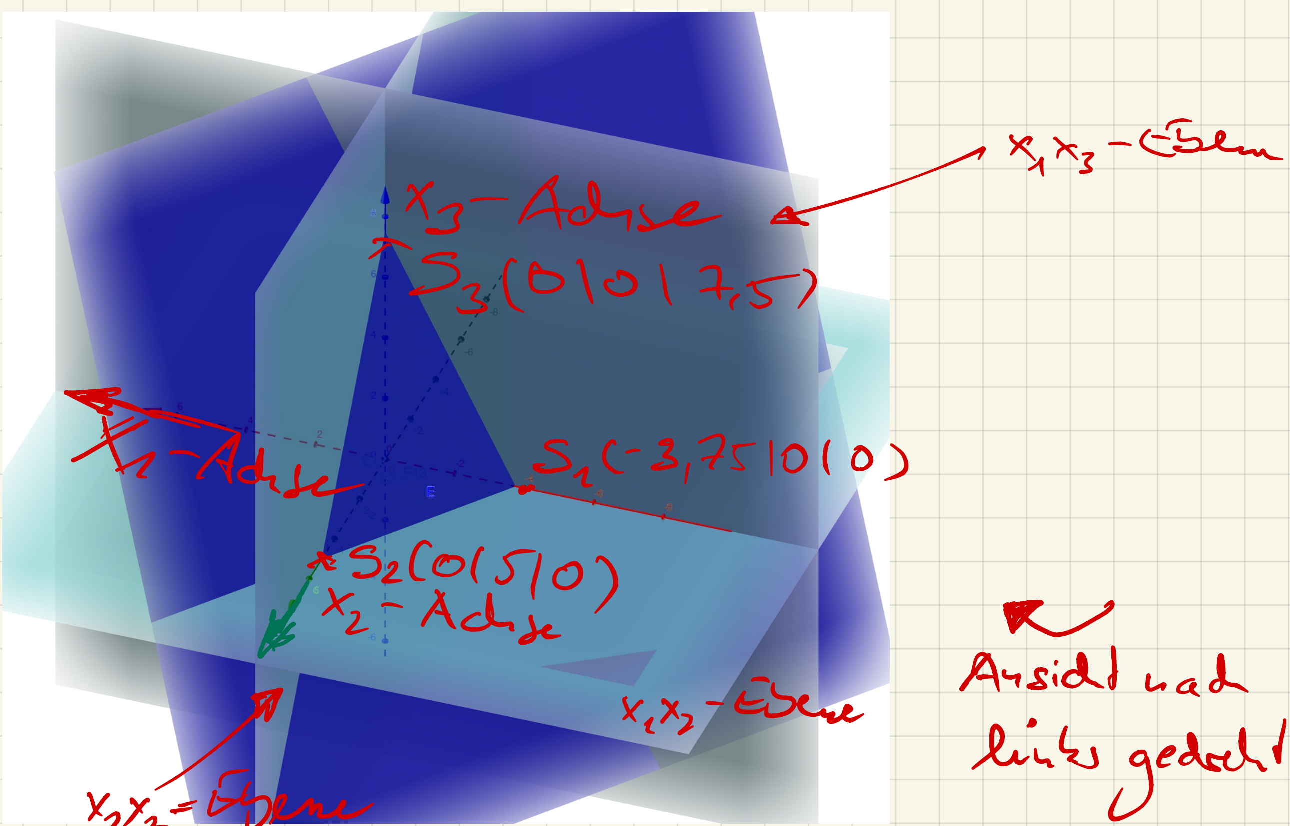
Diese drei Punkte führen zu folgenden Schnittgeraden von E mit den Koordinatenebenen:

$$s_{12}: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3{,}75 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 - (-3{,}75) \\ 5 - 0 \\ 0 - 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3{,}75 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 3{,}75 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$s_{23}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 7{,}5 \end{pmatrix}$$

$$s_{13}: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3{,}75 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 3{,}75 \\ 0 \\ 7{,}5 \end{pmatrix}$$



Ansicht nach links gedreht!

b) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

i) Schnitt mit x_1x_2 – Ebene : $x_3 = 0$

$$\Rightarrow \quad -2 + 3\lambda - 3\mu = 0 \Leftrightarrow 3\lambda = 3\mu + 2$$

$$\lambda = \mu + \frac{2}{3}$$

$\Rightarrow$ eingesetzt in E liefert s_{12}

$$s_{12}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \left(\mu + \frac{2}{3}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 - 2 \\ 2 + 1 \\ 3 - 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2\frac{2}{3} \\ 2\frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ii) Schnitt mit x_2x_3 – Ebene : $x_1 = 0$

$$\Rightarrow \quad 2 + \lambda - 2\mu = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 2\mu - 2$$

$\Rightarrow$ eingesetzt in E liefert s_{23}

$$s_{23}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + (2\mu - 2) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -8 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

iii) Schnitt mit x_1x_3 – Ebene : $x_2 = 0$

$$\Rightarrow \quad 1 + 2\lambda + \mu = 0 \quad \Leftrightarrow \mu = -2\lambda - 1$$

$$s_{13}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + (-2\lambda - 1) \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$s_{13}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$$

4

Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Ebenen. Bestimmen Sie gegebenenfalls eine Gleichung der Schnittgeraden.

a) $E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$E_2: 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 12 = 0$

b) $E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

a) Der einfachste Lösungsweg führt über die Normalenform beider Ebenen.

Also muss E_2 noch umgewandelt werden:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - (-3) \\ -5 - 1 \\ -3 - (-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Es gilt: $\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ Normalenvektor von E_2

$\Rightarrow$ Da beide Normalenvektoren nun also linear abhängig sind, können die Ebenen nur parallel oder identisch sein.

Die Punktprobe mit dem Aufpunkt von E_1

$A(4|1|1)$ führt zur Lösung:

$$A(4|1|1) \text{ in } E_2: \quad 2\cdot 4 - 3\cdot 1 + 1\cdot 1 - 12 \stackrel{?}{=} 0$$
$$8 - 3 + 1 - 12 \stackrel{?}{=} 0$$
$$-6 \neq 0$$

$\Rightarrow A \notin E_2 \Rightarrow$ Die Ebenen E_1 und E_2 sind parallel.

b) Zunächst erstellen wir die Normalenform der beiden Ebenen E_1 und E_2:

$$E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Kreuzprodukt der Richtungsvektoren von E_1:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 9 \\ 6 - 1 \\ 3 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & & 2 \\ 2 & & 3 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow E_1: \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right] = 0$$

$$E_1: -7x_1 + 5x_2 - x_3 - (-21) = 0$$
$$-7x_1 + 5x_2 - x_3 + 21 = 0$$

bzw. $E_1: 7x_1 - 5x_2 + x_3 - 21 = 0$

soll negativ sein

Analog für E_2: $\vec{x} = \begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3-2\\0-(-1)\\1-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow E_2: \begin{pmatrix}-5\\1\\1\end{pmatrix} \circ \left[\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}\right] = 0$$

$$-5x_1 + x_2 + x_3 + 15 = 0$$

$$E_2: 5x_1 - x_2 - x_3 - 15 = 0$$

negativ !

Nun kommen wir zum Vergleich der beiden Normalenvektoren:

$$r \cdot \begin{pmatrix}-7\\5\\-1\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}-5\\1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \text{nicht linear abhängig}$$

Damit müssen beide Ebenen eine gemeinsame Schnittgerade s besitzen:

(1) Lösen des linearen Gleichungssystems aus den beiden Normalenformen:

$$\left.\begin{aligned}&(I)\; 7x_1 - 5x_2 + x_3 - 21 = 0\\ &(II)\; 5x_1 - x_2 - x_3 - 15 = 0\end{aligned}\right\} \begin{aligned}&I + II \Rightarrow III\\ &(\text{so fällt } x_3 \text{ weg}\end{aligned}$$

$$III\; 12x_1 - 6x_2 - 36 = 0 \Rightarrow \lambda = x_1$$

$$-6x_2 = -12\lambda + 36 \quad | : (-6)$$

$$x_2 = 2\lambda - 6$$

$$\left.\begin{array}{l}(I)\;\; 7x_1 - 5x_2 + x_3 - 21 = 0 \\ (II)\;\; 5x_1 - x_2 - x_3 - 15 = 0\end{array}\right\} \; I - 5II \Rightarrow IV$$

(x_2 soll rausfallen)

$$(IV)\;\; -18x_1 + 6x_3 + 54 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lambda = x_1}$$ (wie vorher)

$$-18\lambda + 6x_3 + 54 = 0$$

$$6x_3 = 18\lambda - 54 \quad |:6$$

$$x_3 = 3\lambda - 9$$

(2) Erstellen der Parametergleichung der Schnittgeraden s:

$$s: \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 2\lambda - 6 \\ 3\lambda - 9 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -9 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}$$

Das ist die Parameterform der gesuchten Schnitt-geraden!

Weiterhin viel Erfolg beim Üben!

Bleibt gesund!

[illegible] ;-)