# Binomialverteilung

**Definition:** Ein Zufallsexperiment heißt **Bernoulli-Experiment**, wenn es nur zwei Ergebnisse hat.

Beispiel: Münzwurf $\Omega = \{K;Z\}$
Funktionstest $\Omega = \{\text{geht; geht nicht}\}$
Urnenmodell $\Omega = \{\text{weiß; nicht weiß}\}$
Würfeln $\Omega = \{6, \text{Nicht-6}\}$
Allgemein $\Omega = \{\text{Treffer; Niete}\} = \{1; 0\}$

Trefferwahrscheinlichkeit: P (Treffer) = p
Nietenwahrscheinlichkeit: P (Niete) = q = 1-p

**Definition:** Ein Zufallsexperiment, das aus n **unabhängigen** Durchführungen des selben Bernoulli-Experiments besteht, heißt **Bernoulli-Kette der Länge n**.

Beispiel: Zufallsexperiment: 9-maliges Werfen eines Würfels

A: mind. einmal 6
B: höchstens 8-mal 6
C: genau 2-mal 6
D: beim dritten und vierten Wurf 6

a) Begründe, dass dieses Experiment eine Bernoulli-Kette ist.
b) Berechne die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse A, B, C und D.

**Formel von Bernoulli:**

Gegeben ist eine Bernoulli-Kette der Länge n mit der Trefferwahrscheinlichkeit p.
Ist X die Anzahl der Treffer, dann beträgt die Wahrscheinlichkeit für genau k Treffer:

$$P_p^n(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

**Aufgabentypen**

**Typ 1: Berechnung von Wahrscheinlichkeiten (n und p gegeben)**

Bsp.: Ein Tierarzt behandelt 10 kranke Tiere mit einem Medikament, das nach Angaben des Herstellers in 80 % aller Anwendungen zur Heilung führt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden mindestens 9 von 10 Tieren geheilt?

**Typ 2: Berechnung der Länge einer Bernoulli-Kette (p und P gegeben) Drei-Mindestens-Aufgabe (3-m-Aufg)**

Bsp.: Man rechnet mit 5 % Schwarzfahrern auf einer bestimmten Buslinie. Wie viele Fahrgäste muss der Kontrolleur mindestens nach ihrem Fahrschein fragen, bis er mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % mindestens einen Schwarzfahrer ertappt hat?

**Typ 3: Berechnung der Trefferwahrscheinlichkeit p (n und P gegeben)**

Bsp.: Ein Gerät besteht aus 5 Bauteilen, die unabhängig voneinander mit der gleichen Funktionswahrscheinlichkeit arbeiten. Fällt ein Bauteil aus, so arbeitet das Gerät nicht mehr. Welche Funktionswahrscheinlichkeit müssen die Bauteile haben, wenn das Gerät mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95 % funktionieren soll?

# Binomialverteilung

**Definition:** Ein Zufallsexperiment heißt **Bernoulli-Experiment**, wenn es nur zwei Ergebnisse hat.

Beispiel: Münzwurf Ω = {K;Z}
Funktionstest Ω = {geht; geht nicht}
Urnenmodell Ω = {weiß; nicht weiß}
Würfeln Ω = {6, Nicht-6}
Allgemein Ω = {Treffer; Niete} = {1; 0}

Trefferwahrscheinlichkeit: P (Treffer) = p
Nietenwahrscheinlichkeit: P (Niete) = q = 1-p

**Definition:** Ein Zufallsexperiment, das aus n **unabhängigen** Durchführungen des selben Bernoulli-Experiments besteht, heißt **Bernoulli-Kette der Länge n**.

Beispiel: ZE: 9-maliges Werfen eines Würfels

A: mind. einmal 6
B: höchstens 8-mal 6
C: genau 2-mal 6
D: beim dritten und vierten Wurf 6

a) Begründe, dass dieses Experiment eine Bernoulli-Kette ist!

Bernoulli-Experiment, da Ω = {6; Nicht-6}

Bernoulli-Kette, da Bernoulli-Experiment 9-mal unabhängig voneinander durchgeführt

b) Berechne die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse A, B, C und D.

$p = \frac{1}{6}$;   X: Anzahl der Sechsen

$P(A) = P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \binom{9}{0} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^9 = 80{,}6\ \%$

$P(B) = P(X \leq 8) = 1 - P(X=9) = 1 - \binom{9}{9} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^9 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^0 = 99{,}99\ \%$

$P(C) = P(X=2) = \binom{9}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^7 = 27{,}9\ \%$

$P(D) = \frac{6 \cdot 6 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6}{6^9} = \frac{1}{36} = 2{,}8\ \%$

**Formel von Bernoulli:**

Gegeben ist eine Bernoulli-Kette der Länge n mit der Trefferwahrscheinlichkeit p.
Ist X die Anzahl der Treffer, dann beträgt die Wahrscheinlichkeit für genau k Treffer:

$$P_p^n(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

**Aufgabentypen**

| **Typ 1:** Berechnung von Wahrscheinlichkeiten (n und p gegeben) |
|---|

Bsp.: Ein Tierarzt behandelt 10 kranke Tiere mit einem Medikament, das nach Angaben des Herstellers in 80 % aller Anwendungen zur Heilung führt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden mindestens 9 von 10 Tieren geheilt?

X: Tier wird geheilt

n = 10; p = 0,8;

gesucht: P

$$P_{0,8}^{10}(X \geq 9) = P(X=9) + P(X=10) = \binom{10}{9} \cdot 0{,}8^9 \cdot 0{,}2^1 + \binom{10}{10} \cdot 0{,}8^{10} \cdot 0{,}2^0 = 37{,}58\%$$

| **Typ 2:** Berechnung der Länge einer Bernoulli-Kette (p und P gegeben) 3-m-Aufgabe |
|---|

Bsp.: Man rechnet mit 5 % Schwarzfahrern auf einer bestimmten Buslinie. Wie viele Fahrgäste muss der Kontrolleur mindestens nach ihrem Fahrschein fragen, bis er mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % mindestens einen Schwarzfahrer ertappt hat?

X: Fahrgast ist Schwarzfahrer

p = 0,05; P ≥ 0,90

Gesucht: n

$$P_{0,05}^{n}(X \geq 1) \geq 0{,}90$$

$$1 - P(X=0) \geq 0{,}90$$

$$1 - 0{,}95^n \geq 0{,}90$$

$$0{,}10 \geq 0{,}95^n \qquad | \ \ln \text{ anwenden}$$

$$\ln 0{,}10 \geq \ln 0{,}95^n$$

$$\ln 0{,}10 \geq n \cdot \ln 0{,}95 \qquad | :\ln 0{,}95 \ < 0!!!$$

$$\frac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}95} \leq n$$

$$44{,}89 \leq n$$

A: Es müssen mind. 45 Fahrgäste kontrolliert werden.

| **Typ 3:** Berechnung der Trefferwahrscheinlichkeit p (n und P gegeben) |
|---|

Bsp.: Ein Gerät besteht aus 5 Bauteilen, die unabhängig voneinander mit der gleichen Funktionswahrscheinlichkeit arbeiten. Fällt ein Bauteil aus, so arbeitet das Gerät nicht mehr. Welche Funktionswahrscheinlichkeit müssen die Bauteile haben, wenn das Gerät mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95 % funktionieren soll?

X: Bauteil funktioniert

n = 5; P > 0,95

Gesucht: p

$$P(X=5) > 0{,}95$$

$$p^5 > 0{,}95 \qquad | \ \sqrt[5]{\phantom{x}}$$

$$p > \sqrt[5]{0{,}95} \approx 98{,}98\ \%$$