Es gibt aber auch die Möglichkeit, sich vorzustellen, dass eigentlich nur interessiert, wie oft eine der vier Zahlen gezogen wird, weil jede Kugel ja wieder zurückgelegt wird. Damit ergibt sich ein „neues“ Modell mit den vier Stellen für eine jede Ziffer: 1100 bedeutet nun also einmal die „1“ und einmal die „2“ gezogen. 1001 analog: einmal die „1“ und einmal die „4“ gezogen. 0200 wäre in diesem Sinne: zweimal die „3“ gezogen.

Damit erhalten wir für die Anzahl der Möglichkeiten, zwei unterschiedliche Zahlen zu ziehen: $\binom{4}{2} = 6$ Möglichkeiten. Falls die Zahl identisch ist, gibt es nur $\binom{4}{1} = 4$ Möglichkeiten. Insgesamt sind es damit also 10 Möglichkeiten.

Wenn wir es jetzt wieder etwas komplexer haben wollen, dann gehen wir einmal von drei Zügen aus:

Jetzt gibt es die Möglichkeiten

- Drei unterschiedliche Zahlen: $\binom{4}{3} = 4$ Möglichkeiten (123, 124, 134, 234)
- Zwei unterschiedliche Zahlen: $\binom{4}{2} \cdot 2 = 12$ Möglichkeiten, weil wir zu den „zwei aus vier“ ausgewählten Zahlen entweder die eine oder die andere verdoppeln können (112, 122, 113, 133, 114, 144, 223, 233, 224, 244, 334, 344).
- Nur eine Zahl: $\binom{4}{1} = 4$ Möglichkeiten, weil nun nur 111, 222, 333, 444 möglich ist.

Damit ergeben sich insgesamt:

$\binom{4}{3} + \binom{4}{2} \cdot 2 + \binom{4}{1} = \binom{4}{3} + \binom{4}{2} + \binom{4}{2} + \binom{4}{1} = \binom{5}{3} + \binom{5}{2} = \binom{6}{3} = 20$ Möglichkeiten, die aber nicht alle gleichwahrscheinlich sind. Es handelt sich also nicht um ein Laplace-Experiment.

Weitergedacht für vier Durchführungen:

- Vier unterschiedliche: $\binom{4}{4} = 1$, drei unterschiedliche: $\binom{4}{3} \cdot 3 = 12$,
- zwei unterschiedliche $\binom{4}{2} \cdot 3 = 18$
(hierbei kommt jede Auswahl dreimal vor: "12" als 1112, 1122, 1222)
- nur eine Zahl: $\binom{4}{1} = 4$.
- Insgesamt: $\binom{7}{4} = 35$ Möglichkeiten.

Noch einmal zurück zu unserem Zecher und seiner Dartscheibe:

Ein beschwipster Zecher schleudert drei Wurfpeile auf eine Zielscheibe, die aus fünf gleich großen Feldern besteht. Die Trefferwahrscheinlichkeit für jedes der nummerierten Felder ist gleich. Wie viele verschiedene Ausgänge kann das Pfeilwerfen haben, wenn vorausgesetzt wird, dass jeder Wurf die Scheibe trifft und

(a) **die Reihenfolge der Treffer von Bedeutung ist?**

$$5^3 = 125$$

(b) **die Reihenfolge der Treffer nicht von Bedeutung ist?**

Wieder mit Hilfe des Pascal'schen Dreiecks gilt:

$$\binom{5}{3} + \binom{5}{2} \cdot 2 + \binom{5}{1} = \binom{5}{3} + \binom{5}{2} + \binom{5}{2} + \binom{5}{1} = \binom{6}{3} + \binom{6}{2} = \binom{7}{3} = 35.$$

Da bei (b) aber nicht alle Möglichkeiten gleichwahrscheinlich sind, weil ja in jeder der $\binom{5}{3} = 10$ Möglichkeiten („unterschiedliche Zahlen“) jeweils sechs „Ergebnisse“ drinstecken (z.B. in „123“ stecken die sechs Möglichkeiten 123, 132, 213, 231, 312, 321), in jeder der $\binom{5}{2} \cdot 2 = 20$ Möglichkeiten („eine von zwei Zahlen doppelt“) drei weitere (z.B. in „112“ stecken die Möglichkeiten: 112, 121, 211), aber in den $\binom{5}{1} = 5$ Möglichkeiten („eine Zahl dreimal“) jeweils nur eine einzige (in „111“ ist nur „111“), sind wir also insgesamt wieder bei den 125 Möglichkeiten von (a).

Wie groß ist in beiden Fällen die Wahrscheinlichkeit, dass alle Pfeile das gleiche Feld treffen?

In beiden Fällen gilt: $P(\text{"gleiche Zahl"}) = \frac{5}{125} = \frac{1}{25} = 4\%$.

Zur Beruhigung: Diese Möglichkeit (ZmZ ohne Berücksichtigung der Reihenfolge) kommt nicht mehr im Abitur vor!