Johann-Schöner-Gymnasium Karlstadt
m4

1. **Pokern**

   Beim Pokern wird ein Kartenspiel mit 52 Blatt verwendet. Es gibt die 13 Kartenwerte 2,3,4,5,6,7,8,9,10,J,Q,K,A und die Farben Pik, Kreuz, Karo und Herz. Jeder Spieler erhält fünf Karten. Berechne jeweils die Wahrscheinlichkeit, dass Poker-Ass Joe folgendes Pokerblatter erhält:

   (a) Royal Flush: 10,J,Q,K,A in einer Farbe
   (b) Straight Flush: A,2,3,4,5 oder 2,3,4,5,6 oder 3,4,5,6,7 oder ... oder 9,10,J,Q,K, alle in einer Farbe
   (c) Vierer: vier gleiche Werte
   (d) Full House: Dreier und Paar, z.B. K,K,K,3,3
   (e) Flush: Alle Karten von der gleichen Farbe
   (f) Straight: A,2,3,4,5 oder 2,3,4,5,6 oder 3,4,5,6,7 oder ... oder 10,J,Q,K,A, nicht alle in einer Farbe
   (g) Dreier: drei gleiche Werte aber kein Full House
   (h) Zwei Paare: z.B. A,A,3,3,7
   (i) Ein Paar: zwei gleiche Werte, die restlichen Karten verschiedene Werte

Lösung: Die Zahl der möglichen Pokerblätter zu fünf Karten ist $n = \binom{52}{5} = 2\,598\,960$.

(a) Royal Flush: $z = 4 \quad \Longrightarrow \quad p = \frac{z}{n} = 1{,}54 \cdot 10^{-6}$

(b) Straight Flush: $z = 4 \cdot 9 = 36 \quad \Longrightarrow \quad p = \frac{z}{n} = 1{,}39 \cdot 10^{-5}$

(c) Vierer: $z = 13 \cdot 48 = 624 \quad \Longrightarrow \quad p = \frac{z}{n} = 2{,}40 \cdot 10^{-4}$

(d) Full House: $z = 13 \cdot \binom{4}{3} \cdot 12 \cdot \binom{4}{2} = 3744 \quad \Longrightarrow \quad p = \frac{z}{n} = 1{,}44 \cdot 10^{-3}$

(e) Flush: $z = 4 \cdot \binom{13}{5} - 36 - 4 = 5108 \quad \Longrightarrow \quad p = \frac{z}{n} = 1{,}97 \cdot 10^{-3}$

(f) Straight: $z = 10 \cdot 4^5 - 36 - 4 = 10200 \quad \Longrightarrow \quad p = \frac{z}{n} = 3{,}92 \cdot 10^{-2}$

(g) Dreier: $z = 13 \cdot \binom{4}{3} \cdot \frac{48 \cdot 44}{2} = 54\,912 \quad \Longrightarrow \quad p = \frac{z}{n} = 2{,}11 \cdot 10^{-2}$

(h) Zwei Paare: $z = \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot \binom{4}{2} \cdot 12 \cdot \binom{4}{2} \cdot 44 = 123\,552 \quad \Longrightarrow \quad p = \frac{z}{n} = 4{,}75 \cdot 10^{-2}$

(i) Ein Paar: $13 \cdot \binom{4}{2} \cdot \frac{48 \cdot 44 \cdot 40}{3!} = 1\,098\,240 \quad \Longrightarrow \quad p = \frac{z}{n} = 0{,}423$

2. Eine Klasse mit 25 Schülern besuchen 15 Buben und zehn Mädchen. Für einen Wettbewerb wird eine Gruppe von acht Schülern der Klasse zufällig ausgewählt.

   (a) Berechne die Zahl N der verschiedenen möglichen Gruppen.

   (b) Wie viele verschiedene Gruppenfotos mit nebeneinander aufgestellten Schülern sind möglich, wenn man alle möglichen Gruppen berücksichtigt?

   (c) Wie viele verschiedene Gruppen mit genau x Mädchen und damit $8-x$ Buben gibt es? Berechne die Wahrscheinlichkeit $P(x)$, dass eine Gruppe genau x Mädchen enthält und stelle $P(x)$ als Säulendiagramm grafisch dar. Wertetabelle nicht vergessen!

Lösung: (a) $N = \binom{25}{8} = 1\,081\,575$

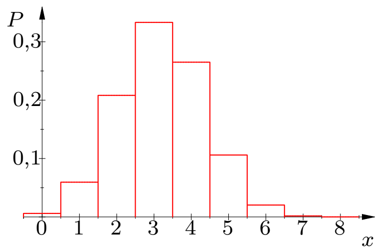
(b) $N \cdot 8! = 1\,081\,575 \cdot 40\,320 = 43\,609\,104\,000 \approx 4{,}36 \cdot 10^{10}$

(c) Es gibt $\binom{10}{x}$ Möglichkeiten, x Mädchen und $\binom{15}{8-x}$ Möglichkeiten, $8-x$ Buben auszuwählen. Die Zahl der Gruppen mit genau x Mädchen ist also

$$Z(x) = \binom{10}{x} \cdot \binom{15}{8-x} \quad \Longrightarrow \quad P(x) = \frac{Z(x)}{N} = \frac{\binom{10}{x} \cdot \binom{15}{8-x}}{\binom{25}{8}}$$

x	$P(x)$
0	0,00595
1	0,05950
2	0,20824
3	0,33318
4	0,26503

x	$P(x)$
5	0,10601
6	0,02039
7	0,00166
8	0,00004



3. **Der runde Tisch**

   (a) n Personen ($n \leqq s$) nehmen an einem runden Tisch mit s Stühlen Platz. Berechne die Anzahl der verschiedenen Sitzordnungen. Es gibt zwei Arten, das Wort *Sitzordnung* zu deuten; rechne mit beiden Möglichkeiten.

   (b) Wie groß ist bei zufälligem Hinsetzen die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Freunde unter den Platznehmenden nebeneinander sitzen?

   (c) Wie (b), aber für drei Freunde!

   (d) Rechne (a), (b) und (c) noch einmal für eine lange, nicht geschlossene Sitzreihe.

   (e) Aus n Personen ($n \geqq s$) werden s ausgewählt und zufällig auf s nummerierte Stühle verteilt. Berechne die Anzahl der verschiedenen Sitzordnungen.

Lösung: (a) Sitzordnung 1: Stühle nummeriert: $m_1 = \mathrm{G\overline{Z}}(s,n) = \frac{s!}{(s-n)!}$

Sitzordnung 2: Stühle nicht nummeriert, es kommt nur darauf an, wer welche Nachbarn hat.

$$m_2 = \frac{m_1}{s} = \frac{\mathrm{G\overline{Z}}(s,n)}{s} = \frac{(s-1)!}{(s-n)!}$$

(b) Der erste Freund hat s Sitzmöglichkeiten, der zweite dann jeweils zwei (links oder rechts), die restlichen $n-2$ Personen auf $s-2$ Sitzen haben

$$\frac{(s-2)!}{(s-2-(n-2))!} = \frac{(s-2)!}{(s-n))!}$$

Sitzmöglichkeiten. Es gibt also

$$g = \frac{2s(s-2)!}{(s-n))!}$$

günstige Sitzmöglichkeiten, d.h.

$$p = \frac{g}{m_1} = \frac{2s(s-2)!(s-n)!}{s!(s-n))!} = \frac{2(s-2)!}{(s-1)!} = \frac{2}{s-1}$$

Es überrascht, dass p nicht von n abhängt. Die fertige Lösung zeigt uns einen eleganteren Lösungsweg:

Sitzt der erste Freund, dann hat der zweite $s-1$ Sitzmöglichkeiten, wovon zwei günstig sind, also $p = \frac{2}{s-1}$.

(c) Wenn der erste Freund schon sitzt, haben die beiden anderen noch

$$\mathrm{G\overline{Z}}(s-1,2) = \frac{(s-1)!}{(s-3)!} = (s-1)(s-2)$$

Sitzmöglichkeiten, wovon sechs günstig sind (123,132,213,312,231,321):

$$P = \frac{6}{(s-1)(s-2)}$$

(d) (a) Wie „nummerierte Plätze“, d.h. m_1

(b) Sitzt der erste Freund nicht auf einem Randplatz, dann hat der zweite zwei Sitzmöglichkeiten, sonst nur eine. Von den insgesamt $s(s-1)$ Sitzmöglichkeiten der beiden Freunde sind also $1 + 2(s-2) + 1 = 2(s-1)$ günstig, also

$$p = \frac{2(s-1)}{s(s-1)} = \frac{2}{s}$$

(c) Sitzt der erste Freud auf einem Randplatz, dann haben die beiden anderen zwei Sitzmöglichkeiten (123, 132), sitzt er neben dem Randplatz, dann haben sie vier (123,132,213,312) sonst sechs Möglichkeiten. Von den insgesamt $s(s-1)(s-2)$ Sitzmöglichkeiten der drei Freunde sind also $2 + 4 + 6(s-4) + 4 + 2 = 6(s-2)$ günstig, also

$$p = \frac{6(s-2)}{s(s-1)(s-2)} = \frac{6}{s(s-1)}$$

(e) $\binom{n}{s} \cdot s! = \frac{n!s!}{s!(n-s)!} = \frac{n!}{(n-s)!} = \mathrm{G\overline{Z}}(n,s)$

4. Ein beschwipster Zecher schleudert drei Wurfpfeile auf eine Zielscheibe, die aus fünf gleich großen Feldern besteht. Die Trefferwahrscheinlichkeit für jedes der nummerierten Felder ist gleich. Wie viele verschiedene Ausgänge kann das Pfeilwerfen haben, wenn vorausgesetzt wird, dass jeder Wurf die Scheibe trifft und

   (a) die Reihenfolge der Treffer von Bedeutung ist

   (b) die Reihenfolge der Treffer nicht von Bedeutung ist?

   Wie groß ist in beiden Fällen die Wahrscheinlichkeit, dass alle Pfeile das gleiche Feld treffen?

Lösung: (a) Als Ergebnisraum verwenden wir $\Omega_r = \{111, 112, ..., 555\}$, wobei xyz bedeutet: Pfeil 1 in Feld x, Pfeil 2 in Feld y und Pfeil 3 in Feld z.

$$z_r = |\Omega_r| = 5^3 = 125$$

Drei verschiedene Felder:	$z_{r3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 =$	60
Zwei verschiedene Felder:	$z_{r2} = 5 \cdot 3 \cdot 4 =$	60
Alle im gleichen Feld:	$z_{r1} = 1 \cdot 5 =$	5

Jedes der 125 Elementarereignisse hat die gleiche Wahrscheinlichkeit $p_r = \left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{1}{125}$.

Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses

$$A = \text{„Alle Pfeile in einem Feld“} = \{111, 222, 333, 444, 555\}$$

ist dann

$$P(A) = 5p_r = \frac{1}{25} = \frac{z_{r1}}{z_r}$$

(b) Als Ergebnisraum verwenden wir $\Omega = \{30000, 21000, ..., 00003\}$, wobei z.B. 01020 bedeutet: ein Pfeil in Feld 2, 2 Pfeile 2 in Feld 4.

Drei verschiedene Felder:	$z_3 = \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} =$	10
Zwei verschiedene Felder:	$z_2 = 5 \cdot 4 =$	20
Alle im gleichen Feld:	$z_1 = 1 \cdot 5 =$	5

$z = z_1 + z_2 + z_3 = 35$

oder mit der Formel für ungeordnete Sichproben mit Zurücklegen:

$$z = \binom{5+3-1}{3} = \binom{7}{3} = 35$$

Es wäre falsch, hier $P(A) = \dfrac{z_1}{z} = \dfrac{5}{35} = \dfrac{1}{7}$ zu verwenden, da die Elementarereignisse von Ω nicht gleichwahrscheinlich sind (in dieser Form kein Laplace-Experiment).

Ω ist eine Vergröberung von Ω_r. Z.B. entsprechen die Elemente 125, 152, 215, 251, 512 und 521 aus Ω_r nur dem einen Element 11001 aus Ω. Dem Element $21000 \in \Omega$ entsprechen die Elemente 112, 121, 211 aus Ω_r, dagegen hat $30000 \in \Omega$ nur ein Gegenstück $111 \in \Omega_r$. Es folgt

$$p(30000) = p_r, \quad p(21000) = 3p_r, \quad p(11100) = 6p_r$$

Mit $A = \{30000, 03000, 00300, 00030, 00003\}$ folgt dann $P(A) = 5p_r = \dfrac{1}{25}$

5. Eine Trommel enthält a rote und b blaue Kugeln. Mit einem Griff werden k Kugeln gezogen. Mit $P(x)$ bezeichnen wir die Wahrscheinlichkeit, dass unter den gezogenen Kugeln genau x blaue sind.

   (a) Beweise: $P(x) = \dfrac{\binom{a}{k-x}\binom{b}{x}}{\binom{a+b}{k}}$.

   (b) Berechne $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$ und $P(4)$ für $a = 10$, $b = 4$ und $k = 6$.

Lösung: (a) Wir denken uns die Kugeln nummeriert, z.B. die roten Kugeln von 1 bis a und die blauen von $a+1$ bis $n = a+b$. Da es nicht auf die Reihenfolge ankommt und ohne Zurücklegen gezogen wird („mit einem Griff"), gibt es insgesamt $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten, k Kugeln aus den n Kugeln zu ziehen. Ein Zug mit genau x blauen Kugeln hat $k-x$ rote Kugeln. Es gibt $\binom{a}{k-x}$ Möglichkeiten, $k-x$ rote Kugeln aus a roten Kugeln zu ziehen und $\binom{b}{x}$ Möglichkeiten, x blaue Kugeln aus b blauen Kugeln zu ziehen. Insgesamt gibt es also $\binom{a}{k-x}\binom{b}{x}$ Möglichkeiten für einen Zug mit b blauen Kugeln.

Andere Herleitung:

Man stelle sich ein Baumdiagramm des k-stufigen Versuchs vor. Für einen Pfad mit $k-x$ roten und x blauen Kugeln ist die Wahrscheinlichkeit

$$p = \frac{a \cdot (a-1) \cdot \ldots \cdot (a-k+x+1)}{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+x+1)} \cdot \frac{b \cdot (b-1) \cdot \ldots \cdot (b-x+1)}{(n-k+x) \cdot (n-k+x-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)} =$$
$$= \frac{a!}{(a-k+x)!} \cdot \frac{b!}{(b-x)!} \cdot \frac{(n-k)!}{n!}$$

Die Zahl der Pfade mit x blauen Kugeln ist gleich der Zahl der Möglichkeiten, x ununterscheidbare blaue Kugeln auf k Plätze zu verteilen, also $\binom{k}{x}$. Damit gilt

$$P(x) = p \cdot \binom{k}{x} = \frac{a!}{(a-k+x)!} \cdot \frac{b!}{(b-x)!} \cdot \frac{(n-k)!}{n!} \cdot \frac{k!}{x!(k-x)!} =$$

$$= \frac{a!}{(k-x)!(a-k+x)!} \cdot \frac{b!}{x!(b-x)!} \cdot \frac{k!(n-k)!}{n!} = \frac{\binom{a}{k-x}\binom{b}{x}}{\binom{a+b}{k}}$$

(b) $P(x) = \frac{\binom{10}{6-x}\binom{4}{x}}{\binom{14}{6}}$, $\quad P(0) = \frac{\binom{10}{6}\binom{4}{0}}{\binom{14}{6}} = \frac{70}{1001} = 6{,}993\%$

$$P(1) = \frac{\binom{10}{5}\binom{4}{1}}{\binom{14}{6}} = \frac{336}{1001} = 33{,}566\%, \quad P(2) = \frac{\binom{10}{4}\binom{4}{2}}{\binom{14}{6}} = \frac{420}{1001} = 41{,}598\%$$

$$P(3) = \frac{\binom{10}{3}\binom{4}{3}}{\binom{14}{6}} = \frac{160}{1001} = 15{,}984\%, \quad P(4) = \frac{\binom{10}{2}\binom{4}{4}}{\binom{14}{6}} = \frac{15}{1001} = 1{,}499\%$$

6. **Das Geburtstagsparadoxon**

   (a) Berechne die Wahrscheinlichkeit $p(n)$, dass unter n zufällig ausgesuchten Personen mindestens zwei am gleichen Tag Geburtstag haben. Es darf angenommen werden, dass das Jahr 365 Tage hat und jeder Tag als Geburtstag gleichwahrscheinlich ist. Berechne speziell $p(2)$ bis $p(10)$, $p(20)$, $p(40)$ und $p(60)$.

   (b) Ab welcher Personenanzahl ist es bei einer Party günstig darauf zu wetten, dass mindestens zwei der Gäste am gleichen Tag Geburtstag haben?

Lösung: (a) $\overline{p}(n)$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter n Personen alle an verschiedenen Tagen Geburtstag haben:

$$\overline{p}(n) = \begin{cases} \dfrac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365-n+1)}{365^n} = \dfrac{365!}{365^n \cdot (365-n)!} & \text{für } n \leqq 365 \\ 0 & \text{für } n > 365 \end{cases}$$

Da der Taschenrechner $n!$ für $n > 69$ nicht berechnen kann, verwenden wir das Ergebnis in der Form (hier ist keine Fallunterscheidung nötig!)

$$\overline{p}(n) = \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \ldots \cdot \frac{365-n+1}{365} = \prod_{i=1}^{n-1} \frac{365-i}{365}$$

$$p(n) = 1 - \overline{p}(n) = 1 - \prod_{i=1}^{n-1} \frac{365 - i}{365}$$

Eine weiter Form für die Berechnung mit einem Taschenrechner, der die Binomialkoeffizienten beherrscht:

$$\overline{p}(n) = \frac{365!}{365^n \cdot (365 - n)!} = \frac{365! \cdot n!}{365^n \cdot (365 - n)! \cdot n!} = \frac{n!}{365^n} \cdot \binom{365}{n}$$

Weiter muss man aufpassen, dass der TR kein Zwischenergebnis $\geqq 10^{100}$ errechnet. Als Beispiel die Berechnung für $n = 40$:

$$\overline{p}(40) = \binom{365}{39} \cdot \frac{326}{40} : 365^{20} : 365^{20} \cdot 40! = 0{,}10877 \quad \Longrightarrow \quad p(40) = 0{,}89123$$

Noch etwas trickreicher die Berechnung für $n = 60$:

$$\binom{365}{60} = \underbrace{\frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot 327}{1 \cdot 2 \ldots \cdot 39}}_{\binom{365}{39}} \cdot \underbrace{\frac{326 \cdot 325 \cdot \ldots \cdot 306}{40 \cdot 41 \ldots \cdot 60}}_{\binom{326}{21} \cdot \frac{21! \cdot 39!}{60!}}$$

$$\overline{p}(60) = \binom{365}{39} : 60! \cdot \binom{326}{21} \cdot 21! \cdot 39! : 365^{20} : 365^{20} : 365^{20} \cdot 60! = 0{,}005877$$

$$\Longrightarrow \quad p(60) = 0{,}99412$$

n	2	3	4	5	6	7
$p(n)$	0,274%	0,820%	1,64%	2,71%	4,05%	5,62%
n	8	9	10	20	40	60
$p(n)$	7,43%	9,46%	11,69%	41,14%	89,12%	99,41%

(b) $p(22) = 47{,}57\%$ und $p(23) = 50{,}73\%$ $\Longrightarrow$ ab 23 Personen