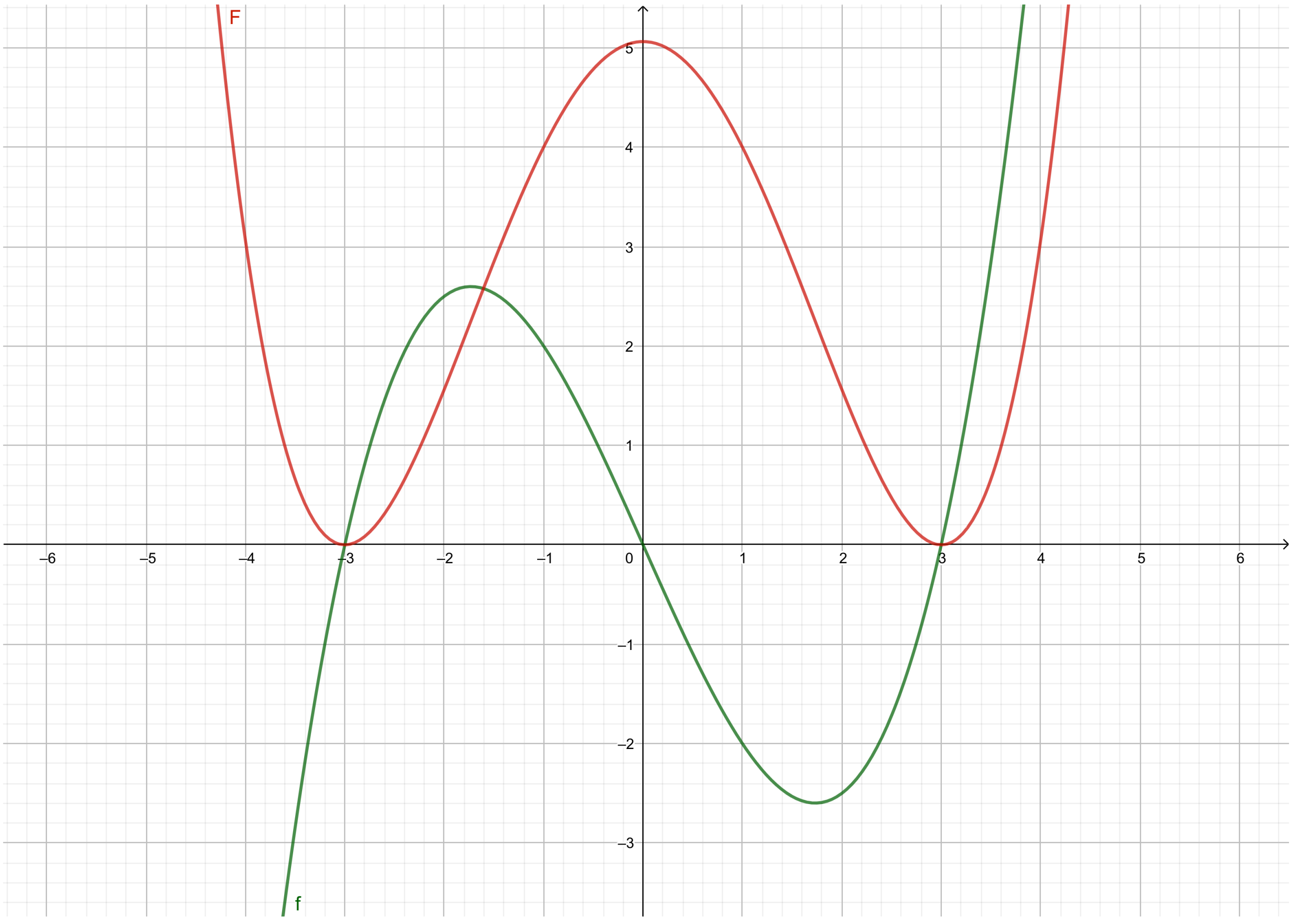
Übungsblatt zur Schulaufgabe aus der Mathematik in 11/1 am 7.11.2019

Aufgabe 1: (4 BE)

Skizzieren Sie zum unten eingezeichneten Graphen der Funktion f den Graphen der Integralfunktion $F_{-3}(x) = \int_{-3}^{x} f(t)dt$.



Maximum, Minimum je eine BE, Randbereich $x \to \pm\infty$ je ½ BE.

Aufgabe 2: (10 BE)

Berechnen Sie folgende Integrale:

(a) $\int_1^2 \left(x^3+3x+1\right) dx = \left[\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2+x\right]_1^2 = \frac{1}{4}\cdot 2^4+\frac{3}{2}\cdot 2^2+2-\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{2}+1\right) = 12-2\frac{3}{4} = 9\frac{1}{4}$

(b) $\int_0^2 e^{4x-1}\, dx = \left[\frac{1}{4}e^{4x-1}\right]_0^2 = \frac{1}{4}\left(e^7 - \frac{1}{e}\right)$

(c) $\lim\limits_{a\to+\infty} \int_1^a \frac{2}{x^3} dx = \lim\limits_{a\to+\infty} \left[-\frac{1}{x^2}\right]_1^a = \lim\limits_{a\to+\infty} \left(-\frac{1}{a^2} - (-1)\right) = 1$

Aufgabe 3: (4 BE)

Ermitteln Sie das unbestimmte Integral:

(a) $\int \frac{1}{4} \cdot e^{-2x+2}\ dx = -\frac{1}{8} \cdot e^{-2x+2} + c;\ c \in \sim$

(b) $\int 4\sqrt{5-2x}\ dx = \int 4 \cdot (5-2x)^{\frac{1}{2}}\ dx = 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (5-2x)^{\frac{3}{2}} + c = -\frac{4}{3} \cdot (5-2x)^{\frac{3}{2}} + c;\ c \in \sim$

Aufgabe 5: (5 BE)

Gegeben ist die Integralfunktion $F(x) = \int_0^x \left(6t^2 - 8\right) dt$ für $-3 \le x \le 3$.

(a) Bestimmen Sie alle Nullstellen x_{N_i} von F und deuten Sie diese in Bezug auf die Flächenbilanz des bestimmten Integrals $\int_0^{x_{N_i}} \left(6t^2 - 8\right) dt$!

$F(x) = \int_0^x \left(6t^2 - 8\right) dt = \left[2t^3 - 8t\right]_0^x = 2x^3 - 8x = 2x \cdot \left(x^2 - 4\right)$

$F(x) = 0 \Leftrightarrow 2x \cdot \left(x^2 - 4\right) = 0 \Rightarrow x_{N_1} = 0; x_{N_2} = -2; x_{N_3} = 2$. Die Nullstellen beschreiben die Integralobergrenzen, an denen das Integral $\int_0^{x_{N_i}} \left(6t^2 - 8\right) dt$ eine ausgeglichene Flächenbilanz aufweist oder gar keine Fläche vorhanden ist (wie bei $x_{N_1} = 0$).

(b) Ermitteln Sie den Term einer Stammfunktion G von $f: x \mapsto 6x^2 - 8$, deren Graph durch den Punkt $P(-3|-30)$ verläuft. Was können Sie über den Zusammenhang von F und G sagen?

$\int \left(6t^2 - 8\right) dt = 2t^3 - 8t + c = F(t)$

$F(-3) = -30 \Rightarrow 2 \cdot (-3)^3 - 8 \cdot (-3) + c = -30 \Leftrightarrow -54 + 24 + c = -30 \Leftrightarrow c = 0$

$G(x) = 2x^3 - 8x = F(x)$

Die beide Funktionen F und G sind identisch.