2. Übungsblatt zur Schulaufgabe aus der Mathematik in 12/1 am 7.11.2019

Aufgabe 1:

Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto -\frac{1}{4}x^4 + \frac{5}{2}x^2 - \frac{9}{4}$ mit dem Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion f zwei Hochpunkte hat. Benutzen Sie dabei die erste und die zweite Ableitung.

(b) Berechnen Sie die beiden Wendepunkte von f ausschließlich mit Hilfe der zweiten Ableitung.

(c) Bestimmen Sie mit Hilfe der Darstellung $f(x) = -\frac{1}{4}(x^2 - 9)(x^2 - 1)$ alle vier Nullstellen von f.

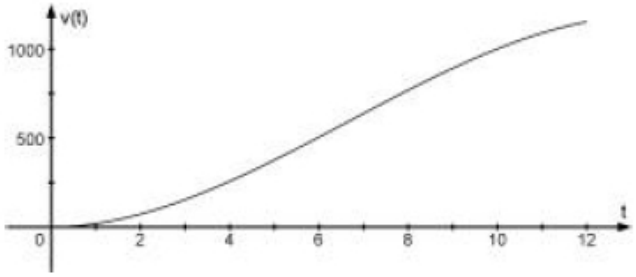
(d) Skizzieren Sie den Graphen G_f im Intervall $]-4; 4[$.

(e) Zeigen Sie, dass die Integralfunktion $F_{-1}(x) = \int_{-1}^{x} f(t)$ identisch ist mit der Funktion $I(x) = -\frac{1}{20}x^5 + \frac{5}{6}x^3 - \frac{9}{4}x - \frac{22}{15}$ und skizzieren Sie deren Verlauf im Intervall $]-3; 3[$.

(f) Berechnen Sie die Größe der Fläche, die der Graph G_f mit der x-Achse einschließt.

Aufgabe 2:

Pflanzen produzieren bei der Fotosynthese Sauerstoff, den sie an ihre Umgebung abgeben. Wir betrachten nun diesen Vorgang für einen bestimmten Baum an einem bestimmten Tag zwischen 6 Uhr morgens (Sonnenaufgang) und 18 Uhr abends (Sonnenuntergang). Messungen ergaben für diesen Baum den abgebildeten Graphen.



Hierbei gibt *t* an, wie viel Stunden seit dem Sonnenaufgang um 6 Uhr vergangen sind.
v(t) gibt an, wie viel Liter Sauerstoff der Baum bis zum Zeitpunkt *t* insgesamt produziert hat.

Der Graph kann näherungsweise beschrieben werden durch

$$v(t) = -t^3 + 20t^2 \quad \text{mit } 0 \le t \le 12 \ .$$

a) Zeigen Sie, dass der Baum bis 13 Uhr insgesamt 637 Liter Sauerstoff produziert hat. Wie viel Sauerstoff gibt der Baum zwischen 13 Uhr und 17 Uhr durchschnittlich pro Stunde ab?

b) Um wie viel Prozent ist die Produktion zwischen 15 Uhr und 17 Uhr niedriger als zwischen 13 Uhr und 15 Uhr? (Runden Sie das Endergebnis auf eine Dezimale.)

c) Bestimmen Sie die Steigung von *v* an der Stelle $t = 5$, und erläutern Sie die Bedeutung dieses Wertes in dem gegebenen Sachzusammenhang.

d) Wann produziert der Baum am meisten Sauerstoff? Geben Sie zunächst eine begründete Vermutung. Erläutern Sie anschließend, wie man diesen Zeitpunkt rechnerisch ermitteln kann.

Lösungen:

Aufgabe 1:

(a) $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{5}{2}x^2 - \frac{9}{4}$ $\quad f'(x) = -x^3 + 5x$ $\quad f''(x) = -3x^2 + 5$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^3 + 5x = 0 \Leftrightarrow -x(x^2 - 5) = 0 \Leftrightarrow x_{E_1} = 0; x_{E_2} = \pm\sqrt{5}$$

$$f''(0) = 5 > 0, also\ Minimum, f''\left(\pm\sqrt{5}\right) = -10 < 0, also\ Maxima.$$

$$Tiefpunkt: E_1\left(0\middle|-\frac{9}{4}\right);\ Hochpunkte\ E_{2,3}\left(\pm\sqrt{5}\middle|4\right);$$

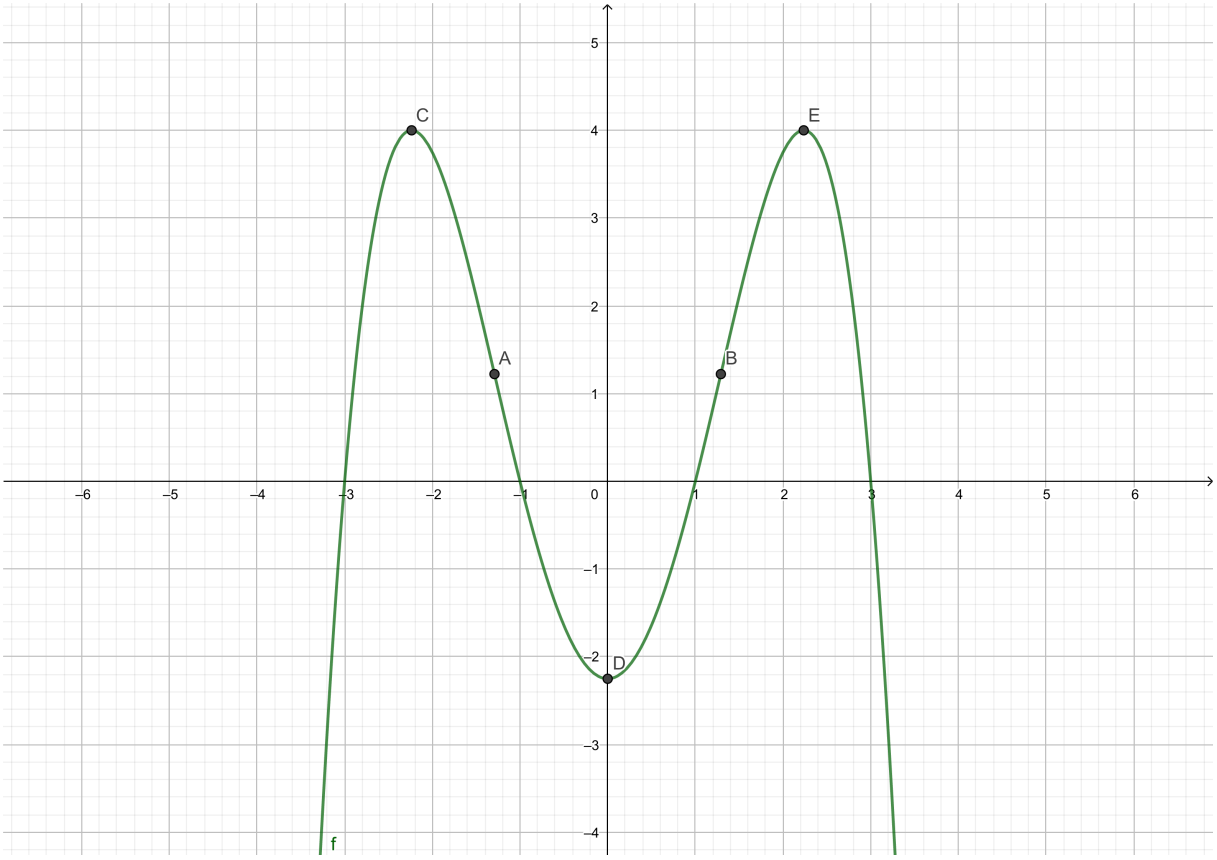
(b) $f''(x) = -3x^2 + 5$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{5}{3} \Leftrightarrow x_{W_{1,2}} = \pm\sqrt{\frac{5}{3}} \approx 1{,}29$$

$-\infty \leq x < -\sqrt{\frac{5}{3}}$	$x = -\sqrt{\frac{5}{3}}$	$-\sqrt{\frac{5}{3}} \leq x < \sqrt{\frac{5}{3}}$	$x = \sqrt{\frac{5}{3}}$	$\sqrt{\frac{5}{3}} \leq x < +\infty$
$f'' < 0$	$f'' = 0$	$f'' > 0$	$f'' = 0$	$f'' < 0$
rechtsgekrümmt	Wendep.	linksgekrümmt	Wendep.	rechtsgekrümmt

(c) Dritte Binomische Formeln führen zu:
$f(x) = -\frac{1}{4}(x^2 - 9)(x^2 - 1) = -\frac{1}{4}(x - 3)(x + 3)(x - 1)(x + 1)$, damit ergeben sich die vier Nullstellen $x_{1,2} = \pm 1;\ x_{3,4} = \pm 3$

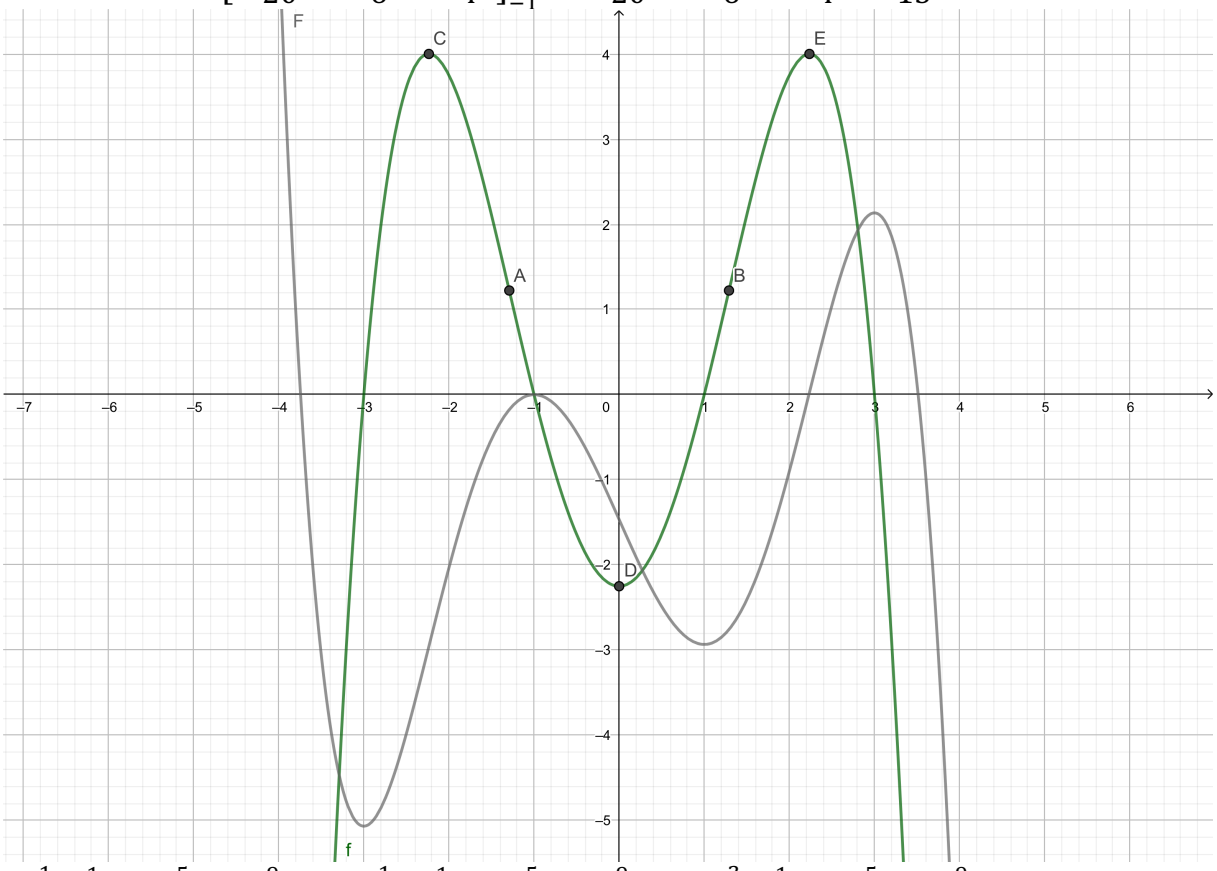
(d)



(e)

$$F_{-1}(x) = \int_{-1}^{x} -\frac{1}{4}t^4 + \frac{5}{2}t^2 - \frac{9}{4}dt$$

$$= \left[-\frac{1}{20}t^5 + \frac{5}{6}t^3 - \frac{9}{4}t\right]_{-1}^{x} = -\frac{1}{20}x^5 + \frac{5}{6}x^3 - \frac{9}{4}x - \frac{22}{15}$$



(f) $\int_{-3}^{-1} -\frac{1}{4}x^4 + \frac{5}{2}x^2 - \frac{9}{4}dx + \int_{-1}^{1} -\frac{1}{4}x^4 + \frac{5}{2}x^2 - \frac{9}{4}dx + \int_{1}^{3} -\frac{1}{4}x^4 + \frac{5}{2}x^2 - \frac{9}{4}dx =$
$5{,}07 + 2{,}93 + 5{,}07 = 13{,}07FE$

Aufgabe 2:

a) Die Produktion bis 13 Uhr wird angegeben durch $v(7)$.
Damit gilt $v(7) = -7^3 + 20 \cdot 7^2 = 637$, d.h. der Baum produziert bis 13 Uhr insgesamt 637 Liter Sauerstoff.
Die durchschnittliche Produktion pro Stunde in dem angegebenen Zeitraum wird bestimmt durch $\frac{v(11)-v(7)}{11-7} = \frac{1089-637}{4} = 113$, d.h. die durchschnittliche Produktion beträgt zwischen 13 Uhr und 17 Uhr 113 Liter pro Stunde.

b) Für die Produktion in den angegebenen Zeiträumen gilt:

$v(9) - v(7) = 254$ bzw. $v(11) - v(9) = 198$.

Damit ergibt sich : $P_{diff} = \frac{254-198}{254} = \frac{56}{254} \approx 0{,}2204$,
d.h. die Produktion hat sich um ca 22,0 % verringert.

c) $v'(t) = -3t^2 + 40t \Rightarrow v'(5) = 125$ (Liter pro Stunde).
Mögliche Erläuterung : Zu diesem Zeitpunkt beträgt die Produktion 125 Liter pro Stunde.
Nicht akzeptiert werden sollten innermathematische Formulierungen wie: "Die Tangente hat die Steigung 125." o.ä..

d) Mögliche begründete Vermutungen über den gesuchten Zeitpunkt:

- aus dem Kontext : höchste Lichtintensität gegen ca. 12 Uhr.
- aus dem Graphen: stärkste Steigung am Wendepunkt etwa zwischen $t = 6$ und $t = 7$.

Erläuterung der Berechnung mit dem im Unterricht behandelten Verfahren zur Bestimmung des Wendepunktes (z.B. notwendige Bedingung $v''(t_w) = 0$; hinreichende Bedingung $v''(t_w) = 0$ und $v'''(t_w) \neq 0$).
Eine Berechnung liefert als gesuchten Zeitpunkt $t_w = \frac{20}{3}$,
d.h. die maximale Produktion wird um 12.40 Uhr erreicht.